



COURS:

Equation différentielle: Soit $f: I \times U \rightarrow \mathbb{R}$ continue, $I \subset \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}$ intervalle

(1) $y' = f(t, y)$

Résoudre (1) sur $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, c'est trouver tous les couples (J, γ) constitué d'un intervalle $J \subset I$ et d'une fonction $\gamma: J \rightarrow \mathbb{R}$ C' tels que :

i) $\forall t \in J, \gamma(t) \in U$

ii) $\forall t \in J, \gamma'(t) = f(t, \gamma(t))$

DEF: (1) est une équation linéaire lorsque $x \mapsto f(t, x)$ est affine ($f(t, x) = a(t)x + b(t)$)
en général, $I = \mathbb{R}$ (ou $I \subset \mathbb{R}$), $U = \mathbb{R}$

Exo 1:

1) Ecrire sous la forme $y' = f(t, y)$

2) $g(x) := f(t, x) - f(t, 0)$, résoudre $y' = g(y)$

3) résoudre en utilisant la solution trouvée en 2 comme facteur intégrant.

a) $y' + 2y = e^t$

$y' = -2y + e^t = f(t, y)$

avec $f: (t, x) \mapsto e^t - 2x$
 $\in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

On cherche (J, γ) tq $\forall t \in J, \gamma'(t) = \underbrace{e^t - 2\gamma(t)}_{= f(t, \gamma(t))} \quad (1)$
 $\in \mathbb{R}$

① $g(x) = f(t, x) - f(t, 0) = -2x$

$\gamma'(t) = g(\gamma(t)) = -2\gamma(t) \quad (2)$

On dit que (2) est l'équation homogène associée à (1)

② On veut résoudre (2) $y' = -2y$

L'ensemble des solutions maximales de cette équation est $S_H = \{t \mapsto Ce^{-2t}; c \in \mathbb{R}\}$

③ Utiliser l'information sur S_H pour résoudre (1)

Soit $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C'

Soit $w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction donnée par $w(t) = e^{2t}\gamma(t)$

On a $w'(t) = e^{2t}\gamma'(t) + 2e^{2t}\gamma(t)$ $\uparrow$ changer de fonction inconnue
 $= e^{2t}(\gamma'(t) + 2\gamma(t))$

Donc $(\mathbb{R}, \gamma)$ est une solution de (1) ssi $w'(t) = e^{2t} \cdot e^t = e^{3t}$

Or, les solutions de $w'(t) = e^{3t}$ sont les fonctions $w(t) = \int_0^t e^{3s} ds + c; c \in \mathbb{R}$ quelconque

$$= \left[\frac{e^{3s}}{3} \right]_0^t = \frac{e^{3t}}{3} - \frac{1}{3} + c, c \in \mathbb{R}$$

D'où $\exists c \in \mathbb{R}$ tq $w(t) = \frac{e^{3t}}{3} + c, c \in \mathbb{R}$

Donc $(\mathbb{R}, y)$ est une solution de (1) ssi $y(t) = e^{-2t} \omega(t)$ avec $\omega(t) = \frac{e^{3t}}{3} + c$

Finalement, l'ensemble des solutions est $S = \left\{ (\mathbb{R}, t \mapsto C e^{-2t} + \frac{1}{3} e^t), c \in \mathbb{R} \right\}$

Note: $y' = -2y$

$$\leadsto \frac{y'}{y} = -2$$

$$\leadsto \ln |y| = -2t + c$$

$$|y| = K e^{-2t}$$

$$\leadsto \omega = e^{2t} y(t)$$

b) $y' - 5y = t$

$$f(t, x) = t + 5x$$

$$\neq y' - 5y = 0$$

$$\frac{y'}{y} = 5 \leadsto \ln |y| = 5t + c \leadsto |y| = K e^{5t}$$

Soit $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Soit $w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad w(t) = e^{-5t} y(t)$

$$\text{On a } w'(t) = -5e^{-5t} y(t) + e^{-5t} y'(t) \\ = e^{-5t} (y'(t) - 5y(t))$$

Donc y est solution de b ssi $y'(t) - 5y(t) = t$

$$\Leftrightarrow w'(t) = t e^{-5t}$$

$$\Leftrightarrow w(t) = \int_0^t s e^{-5s} ds + c; c \in \mathbb{R}$$

$$\text{or } \int_0^t s e^{-5s} ds = \left[s \frac{e^{-5s}}{-5} \right]_0^t - \int_0^t 1 \cdot \frac{e^{-5s}}{-5} ds$$

$$= \frac{-t e^{-5t}}{5} + \frac{1}{5} \left[\frac{e^{-5s}}{-5} \right]_0^t$$

$$= \frac{-t}{5} e^{-5t} - \frac{1}{25} (e^{-5t} - 1)$$

D'où y est solution de (b) ssi $y(t) = -\frac{t}{5} - \frac{1}{25} + \frac{1}{25} e^{5t} + C e^{5t}$

$$= C_1 e^{5t} - \frac{t}{5} - \frac{1}{25} \quad \text{pour un } C_1 \in \mathbb{R}$$

[+fin exo 1]

Exo 1.2:

$$a) y' - ty = t^3$$

$$y' - ty = 0$$

$$f(t, x) = t^3 - ty$$

$$\neq y' - ty = 0$$

$$\frac{y'}{y} = t \quad \ln |y| = \frac{t^2}{2} + c \\ |y| = K \cdot e^{t^2/2}$$

Soit $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Soit $w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad w(t) = e^{-t^2/2} y(t)$

$$w'(t) = -t e^{-t^2/2} y(t) + e^{-t^2/2} y'(t) \\ = e^{-t^2/2} (-ty(t) + y'(t))$$

Donc y est solution ssi $-ty(t) + y'(t) = t^3$

$$\Leftrightarrow w'(t) = t^3 e^{-t^2/2}$$

$$\text{Ou encore } w(t) = \int_0^t s^3 e^{-s^2/2} ds + c$$

$$\begin{aligned} \text{IPP} \quad \int_0^t s^3 \cdot s e^{-s^2/2} ds + c &= \left[s^2 \left(e^{-s^2/2} \right) \right]_0^t - \int_0^t 2s \left(-e^{-s^2/2} \right) ds + c \\ &= -t^2 e^{-t^2/2} + 2 \left[-e^{-s^2/2} \right]_0^t + c \\ &= -t^2 e^{-t^2/2} - 2e^{-t^2/2} + 2 + c \end{aligned}$$

$$\text{D'où } y(t) = \left(-t^2 e^{-t^2/2} - 2e^{-t^2/2} + 2 + C \right) e^{-t^2/2}$$

$$= -t^2 - 2 + (2+C) e^{-t^2/2}$$

$$= -t^2 - 2 + C e^{-t^2/2} ; C \in \mathbb{R}$$

$$2) a) y' + \frac{1}{t} y = 3 \cos(2t) ; I =]0, +\infty[\quad (a)$$

$$(a) \text{ s'écrit } y' = f(t, y) \text{ où } f(t, x) \mapsto 3 \cos(2t) - \frac{x}{t} ; f \in C^0(]0, +\infty[, \mathbb{R})$$

$$y' + \frac{1}{t} y = 0$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{t}$$

$$\leadsto \ln|y| = -\ln|t| + C \leadsto y = \frac{K}{t} ; K \in \mathbb{R}$$

Soit $y \in C^1$ sur $]0, +\infty[$ et $w(t) = t y(t)$.

$$\text{On a } w'(t) = t y'(t) + y(t)$$

$$= t y'(t) + \frac{1}{t} y(t)$$

Donc y est solution de (a)ssi $w'(t) = 3 \cos(2t)$

$$\text{Or } \int_0^t 3 \cos(2s) ds = \left[s \cdot \frac{\sin 2s}{2} \right]_0^t - \int_0^t 1 \cdot \frac{\sin 2s}{2} ds$$

$$= \frac{t \sin 2t}{2} - \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos 2s}{2} \right]_0^t = \frac{t \sin 2t}{2} - \frac{1}{4} \cos 2t + \frac{1}{4}$$

$$\text{Donc les solutions de (a) sont les } y, t \mapsto \frac{C}{t} + \frac{3t \sin(2t)}{2t} + \frac{1}{4t} \cos(2t) - \frac{1}{4t}$$

$$\frac{C'}{t} + \frac{3 \sin(2t)}{2} + \frac{3 \cos(2t)}{4t}$$

Exo3.

1) Trouver les sol de l'équa diff sur $]1, +\infty[$.

$$(E) \quad y' = \frac{2}{1-x^2} y = 1$$

On s'intéresse à l'ED : $y' = f(t, y)$ où $f: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $f(t, x) = \frac{2}{1-t^2} x + 1$ qui est bien continue sur $I \times \mathbb{R}$.

Une primitive $t \mapsto \frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{(1-t)(1+t)} = \frac{a}{(1-t)} + \frac{b}{(1+t)}$

$$\bullet \frac{1}{1-t^2} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t}$$

$$\rightarrow a = \frac{1}{(1-t^2)} \times (1-t) \Big|_{t=1} = 1/2$$

$$\rightarrow b = \frac{1}{1-t^2} \times (1+t) \Big|_{t=-1} = 1/2$$

$$\text{CCL: } \frac{2}{1-t^2} = \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}$$

décomposition
en facteurs simples

• Soit $t > 1$:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \frac{2}{1-s^2} ds &= \int_{t_0}^t \frac{1}{1-s} ds + \int_{t_0}^t \frac{1}{1+s} ds \\ &= [-\ln(1-s)]_{t_0}^t + [\ln(1+s)]_{t_0}^t \\ &= \ln(1+t) - \ln(1-t) + C \\ &= \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) + C \text{ pour un } C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\rightarrow y'(t) = a(t)y + b(t)$$

$$A(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds$$

eq homogène associée: $y(t) = C e^{A(t)}$

eqs complètes: $C(t) = w(t) = e^{-A(t)} y(t)$

$\rightarrow$ calculer $w'(t)$:

$$\begin{aligned} \bullet w'(t) &= -A'(t) e^{-A(t)} y(t) + e^{-A(t)} y'(t) \\ &= e^{-A(t)} (y'(t) - a(t) y(t)) \\ &= e^{-At} \quad (\text{y est sol de (E) ssi } w(t) = e^{-A(t)}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet w(t) &= \int_{t_0}^t e^{-A(s)} ds + C; C \in \mathbb{R} \\ &= \int_{t_0}^t \frac{1-s}{s+1} ds + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \frac{1-s}{s+1} ds &= \int_{t_0}^t \frac{-1-s+2}{1+s} ds = \frac{2}{1+s} - 1 \\ &= 2 \ln(1+t) - t + C; C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet w(t) &= e^{-A(t)} y(t) \Rightarrow y(t) = w(t) e^{-A(t)} \\ y(t) &= w(t) \cdot \frac{1+t}{1-t} \end{aligned}$$

$$y(t) = 2 \ln(1+t) \times \frac{1+t}{1-t} - t \times \frac{1+t}{1-t} + C \times \frac{1+t}{1-t}$$

2) étudier l'existence de fonctions continues sur $\mathbb{R}$

On connaît les solutions de (E) sur $]1, +\infty[$

→ si y est une sol C¹ sur $\mathbb{R}$ de (E), alors la restriction $y|_I$ est aussi solution de (E)

$$\text{Donc } \exists c \in \mathbb{R} \text{ tq } y|_I(t) = 2 \left(\frac{1+t}{1-t} \right) \ln(1+t) + (c-t) \frac{1+t}{1-t}$$

$$\text{En particulier, } \lim_{t \rightarrow 1^+} y|_I(t) = \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{1}{1-t} \left(\frac{1+t}{1-t} \right)$$

$$\text{or } \frac{1}{1-t} \left(\frac{1+t}{1-t} \right) \sim \frac{1}{1-t} (4 \ln(2) + c - 1)$$

$$\text{si } 4 \ln(2) + c - 1 \neq 0, \text{ alors } |y|_I(t) \xrightarrow[t \rightarrow 1^+]{+ \infty}$$

$$\text{Dans ce cas, } \lim_{t \rightarrow 1^+} |y(t)| = \lim_{t \rightarrow 1^+} (y|_I(t)) = +\infty$$

ce qui est absurde car $y \in C^0(\mathbb{R})$

Exos:

Mq l'ensemble des solutions de l'équation $tx' - 2x = 0$ (E)* sur $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dim 2

Ce n'est pas une eq. diff sur $\mathbb{R}$ parce qu'elle s'écrit $y' = f(t, y)$ avec $f(t, x) = 2x/t$ et cette fonction f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

Mais

$$\bullet \text{ si } y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ vérifie } ty'(t) - 2y(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\text{Alors } \begin{cases} y_+ = y|_{]0, +\infty[} \text{ vérifie } y'_+ = \frac{2}{t} y \\ y_- = y|_{]-\infty, 0[} \text{ vérifie } y'_- = \frac{2}{t} y \end{cases}$$

Calcul de $y(t)$

$$\text{On sait que } y(t) = Ce^{A(t)} \text{ avec } C \in \mathbb{R}, \text{ et } A(t) = \int_1^t \frac{2}{s} ds = 2 \ln(t)$$

$$\text{Donc } y_+(t) = C_+ t^2, C_+ \in \mathbb{R}$$

$$\text{de même, } y_-(t) = C_- t^2; C_- \in \mathbb{R}$$

$$\text{Donc } y|_{\mathbb{R}^*}(t) = C_+ t^2 \mathbb{1}_{]0, +\infty[} + C_- t^2 \mathbb{1}_{]-\infty, 0[}$$

→ de plus, y continue sur $\mathbb{R}$ donc continue en $t=0$

$$\underline{t=0}: y(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} y(t)$$

$$\rightarrow \text{Finalement, } y(t) = t^2 (C_+ \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(t) + C_- \mathbb{1}_{]-\infty, 0[}(t)) \text{ avec } C_+, C_- \in \mathbb{R}$$

↳ L'ensemble des sols est :

$$S = \{ t \mapsto t^2 C_+ \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(t) + C_- \mathbb{1}_{]-\infty, 0[}(t) ; C_+, C_- \in \mathbb{R} \}$$

* contient la fonction nulle

* est stable par CL

donc S est un sev de $C^1(\mathbb{R})$

Par ailleurs,

$$\varphi_+ = t \mapsto t^2 \mathbb{1}_{]0, +\infty[}$$

$$\varphi_- = t \mapsto t^2 \mathbb{1}_{]-\infty, 0[} \text{ est une famille génératrice de } S$$

- c'est aussi une famille libre:

$$\text{si } \lambda_+ \varphi_+ + \lambda_- \varphi_- = 0, \text{ alors } \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\lambda_+ \varphi_+(t) + \lambda_- \varphi_-(t) = 0 \text{ pour } t=1, \lambda_+ = 0; t=-1, \lambda_- = 0$$

$\leadsto$ toute CL linéaire de solution est une solution aussi

Exo. 11. *

$$1) t_0, a \in \mathbb{R} \text{ et } \phi, g: [t_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \text{ } C^0; g \geq 0$$

$$+ \forall t \geq t_0, \phi(t) \leq a + \int_{t_0}^t g(s) \phi(s) ds$$

$$\text{mq } \forall t \geq t_0, \phi(t) \leq a \exp\left(\int_{t_0}^t g(s) ds\right) \text{ (on peut considérer } h(t) = a + \int_{t_0}^t g(s) \phi(s) ds)$$

$$\bullet a=0? \phi(t) \geq 0 \forall t \geq t_0? \quad \psi(t) \leq a + \int_0^t g(s) \psi(s) ds$$

On obtient $h'(t) \leq g(t) h(t)$

Soit $G(t)$ une primitive de g

$$\text{On a } (e^{-G(t)} h(t))' = -g(t) e^{-G(t)} h(t) + e^{-G(t)} h'(t) = e^{-G(t)} (h'(t) - g(t) h(t)) \leq 0$$

$$\text{CCL: } \forall t \geq 0, e^{-G(t)} h(t) \leq e^{-G(0)} h(0)$$

$$\text{donc } h(t) \leq a e^{\int_0^t g(s) ds}$$

$$\text{or } \psi(t) \leq h(t)$$

$$\text{donc } \psi(t) \leq a e^{\int_0^t g(s) ds}$$

Feuille 1, Exo 1.11:

(suite)

2) a) $y'' + qy = 0$, $\int_0^t qyy' dx \leq K$?

On a: $qyy' = -y''y'$

$$\begin{aligned} \text{donc } \int_0^t qyy' dx &= - \int_0^t y'y'' dx = -\frac{1}{2} [y'^2(x)]_0^t \\ &= -\frac{1}{2} (y'(0)^2 - y'(t)^2) \leq \frac{1}{2} y'(0)^2 \end{aligned}$$

Donc pour $K = \frac{1}{2} y'(0)^2$, on a $\int_0^t qyy' dx \leq K$

b) Mq y est bornée. $\Psi(t) := q(t)y(t)^2 + \text{Gronwall}$

$$\rightarrow \Psi'(t) = q'(t)y^2(t) + 2q(t)y(t)y'(t)$$

$$\rightarrow \int_0^t \Psi'(s) ds = \Psi(t) - \Psi(0) \leq \int_0^t q'(s)y(s)^2 ds + 2K$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Psi(t) &\leq \Psi(0) + 2K + \int_0^t \frac{q'(s)}{q(s)} q(s)y^2(s) ds \\ &\leq \Psi(0) + 2K + \int_0^t \frac{q'(s)}{q(s)} q(s)y^2(s) ds \\ &\leq \underbrace{\Psi(0) + 2K}_a + \int_0^t \underbrace{\frac{q'(s)}{q(s)} q(s)}_{q(s)} \Psi(s) ds \end{aligned}$$

D'après Gronwall, on a

$$\Psi(t) \leq a e^{\int_0^t \frac{q'(s)}{q(s)} ds} \leq a e^{\ln \frac{|q(t)|}{|q(0)|}} \leq a \frac{q(t)}{q(0)}$$

Finalement, $q(t)y^2(t) \leq a \frac{q(t)}{q(0)} \Rightarrow y^2(t) \leq \frac{a}{q(0)}$

Exo 2.1

$$I =]0, +\infty[$$

$$y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y(x)^2 = -9x^2$$

1) Pour quelle valeur de $a > 0$ $y: x \mapsto ax$ est-elle sol de (1) sur I ? (y_0)si $y(x) = a(x)$ est solution de (1), alors

$$y'(x) = a \frac{y(x)}{x} = a \quad y^2(x) = a^2 x^2$$

on remplace ds (1):

$$a - a - a^2 x^2 = -9x^2 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \text{ car } a > 0$$

donc $y_0: x \mapsto 3x$

2) Soit $J \subset \mathbb{I}$ un intervalle et $z: J \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sur J

$$\forall x \in J, y(x) := y_0(x) = \frac{1}{z(x)}$$

Hq (J, y) sol sur J de l'équation $z'(x) + (6x + \frac{1}{x})z(x) = 1$

$$y(x) = 3x - \frac{1}{z(x)}; x \in J$$

$$y'(x) = 3 + \frac{z'(x)}{z(x)^2}$$

or y est solution de (1)

$$\text{ssi } y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y^2(x) = -9x^2$$

→ on remplace :

$$3 + \frac{z'(x)}{z(x)^2} - \frac{3x}{x} + \frac{1}{z(x)x} - \left(y_0(x)^2 - \frac{2y_0}{2(x)} + \frac{1}{z(x)^2} \right) = -9x^2$$

$$\Rightarrow \frac{z'}{z^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{6x}{z} - \frac{1}{z^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z^2} (z' + \frac{z}{x} + 6xz - 1) = 0$$

$$\Rightarrow z' + \left(\frac{1}{x} + 6x \right) z = 1$$

$$3) (2) : z'(x) + \left(6x + \frac{1}{x} \right) z(x) = 1$$

$$\text{Soit } A(x) = - \int \left(\frac{1}{t} + 6t \right) dt$$

$$= - [\ln(t) + 3t^2]^\infty$$

$$= -\ln x - 3x^2 + c$$

je choisis $c=0$

$$\text{Soit } z \in C^1 \text{ et } w(x) = e^{-A(x)} z(x)$$

$$\begin{aligned} \text{On a } w'(x) &= -a(x)e^{-A(x)}z(x) + e^{-A(x)}z'(x) \\ &= e^{-A(x)}(z'(x) - a(x)z(x)) \end{aligned}$$

↳ Donc (J, z) est solution de (2) ssi $w'(x) = e^{-A(x)}$

$$\Leftrightarrow w(x) = \int^x e^{-A(s)} ds$$

$$= \int^x e^{\ln s} e^{3s^2} ds$$

$$= \int^x s e^{3s^2} ds$$

$$= \frac{e^{3x^2}}{6} + c; c \in \mathbb{R}$$

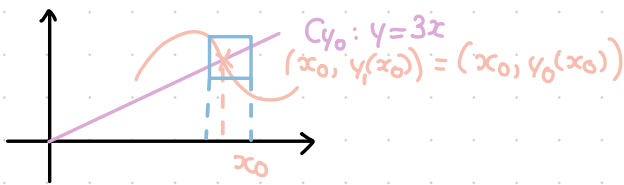
$$\Leftrightarrow z(x) = e^{A(x)} \left(\frac{e^{3x^2}}{6} + c \right)$$

$$= \frac{1}{x} e^{-3x^2} \left(\frac{e^{3x^2}}{6} + c \right) = \frac{1}{6x} + \frac{Ce^{-3x^2}}{x}$$

eq linéaires, les sol
maximales sont globales

4) Eq (1)

a) (J_1, y) sol maximale de (1) autre que (I, y_0) .
 $y(x) > 3x \quad \forall x \in J_1$ ou $y(x) < 3x \quad \forall x \in J_1$.



Soit (J_1, y_1) une autre solution de l'équation (1).

Par l'absurde: Supposons qu'il existe $x_0 \in J_1 \subset]0, +\infty[$ tq $y_1(x_0) = y_0(x_0)$ //

Dans ce cas, y et y_0 sont deux solutions du pb de Cauchy. $\begin{cases} (1) \\ y(x_0) = 3x_0 \end{cases}$

D'après le thm de CL (unicité), cela entraîne que $y_0 = y_1$, ce qui est absurde

$\hookrightarrow$ ou bien $y_1(x) > 3x \quad \forall x \in J_1$

ou bien $y_1(x) < 3x \quad \forall x \in J_1$

(autre rédaction:)

$\mathcal{K}(E) \Leftrightarrow y' = f(x, y)$

avec $f(x, y) = \frac{y}{x} + y^2 - 9x^2$

$\forall J \subset]0, +\infty[$, f est continue en (x, y) et C^1 en y

$\hookrightarrow$ donc le pb de Cauchy admet une unicité

Par l'absurde:

Soit (J_1, y) une solution maximale $\neq y_0$

Supposons $\exists x_0 \in J_1$ tq $y(x_0) = 3x_0$

Alors y et y_0 sont deux solutions du m pb de Cauchy

$y' = f(x, y)$, $y(x_0) = 3x_0$

Par unicité on aurait $y \equiv y_0$ (contradiction avec $y \neq y_0$)

Donc $\forall x \in J_1$, $y(x) \neq 3x$

Comme $y - 3x$ est continue sur J_1 , elle garde un signe constant

Soit $y(x) > 3x \quad \forall x \in J_1$, soit $y(x) < 3x \quad \forall x \in J_1$

Suite exo 2.1:

b) Mq on ne peut pas avoir $y(x) > 3x \quad \forall x \in \mathcal{I}$ Pour $x \in]0, +\infty[$

$$z(x) = \frac{c}{x} e^{-3x^2} + \frac{1}{6x} ; c \in \mathbb{R} \quad (Q3)$$

D'après Q2, $(\mathcal{I}, y)$ est solution de (1) ssi $(\mathcal{I}, z)$ est solution de (2)

$$\text{avec pour } x \in \mathcal{I}, y(x) = 3x - \frac{1}{z(x)}$$

D'après Q3) $\mathcal{I} = \mathcal{I} =]0, +\infty[$, et pour $x \in \mathcal{I}$

$$\begin{aligned} \text{Donc pour } x > 0, y(x) &= 3x - \frac{1}{\frac{c}{x} e^{-3x^2} + \frac{1}{6x}} \\ &= 3x - \frac{6x}{6ce^{-3x^2} + 1} \\ &= 3x \left(1 - \frac{2}{6ce^{-3x^2} + 1} \right) \end{aligned}$$

$$\text{On a } e^{-3x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

donc il existe $x_0 > 0$ tel que $6ce^{-3x_0^2} + 1 > 0$

$$\text{donc } 1 - \frac{2}{6ce^{-3x_0^2} + 1} < 1$$

Ainsi, d'après a), pour tout $x > 0, y(x) < 3x$

c) En déduire l'ensemble des solutions maximales de (1)

D'après (b), les solutions de (1) sont de la forme $(\mathcal{I}, y)$ avec pour $x \in \mathcal{I}$,

$$y(x) = 3x - \frac{6x}{6ce^{-3x^2} + 1} ; c \in \mathbb{R}$$

$$\text{avec } \forall x \in \mathcal{I}, y(x) < 3x$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{I}, z(x) > 0$$

$$\text{Si } c < 0, 6ce^{-3x^2} + 1 > 0$$

$$\Rightarrow e^{-3x^2} < \frac{-1}{6c} (> 0)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{I} \quad -3x^2 < \ln\left(\frac{-1}{6c}\right)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{I} \quad x^2 > \frac{-1}{3} \ln\left(\frac{-1}{6c}\right)$$

$$\text{si } \ln\left(\frac{-1}{6c}\right) < 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{6c} < 1 \Leftrightarrow \frac{-1}{6} > c$$

Alors il existe $x_0 > 0$ tel que $x_0^2 > \frac{-1}{3} \ln\left(\frac{-1}{6c}\right)$. Donc $c > -1/6$ Ainsi, les solutions sont de la forme $(\mathcal{I}, y)$ avec $c > -1/6$ ou $(\mathcal{I}, y_0)$

$$\begin{aligned} (c > -1/6 \\ 6ce^{-3x^2} > -e^{-3x^2} \\ > -1 \\ 6ce^{-3x^2} + 1 > 0 \leadsto z(x) > 0) \end{aligned}$$

Exo3:

$$y'' - 4y' + 3y = (2t+1)e^{-t}$$

i) pour quelles valeurs de r , $y \mapsto e^{rt}$ solution de l'équation homogène associée?

$$(*) \quad y'' - 4y' + 3y = 0 \quad (E_h)$$

$$\begin{array}{l|l} y(t) = e^{rt} & y \text{ solution de } (*) \\ y'(t) = re^{-rt} & \Leftrightarrow r^2 - 4r + 3 = 0 \\ y''(t) = r^2 e^{rt} & \Leftrightarrow r = 3 \text{ ou } r = 1 \end{array}$$

$$b) \quad z := e^{-3t}y \text{ m.q. } S_{E_h} = \{y: t \mapsto \alpha e^{3t} + \beta e^t; \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{Pour } t \in \mathbb{R}, z(t) = e^{-3t}y(t)$$

$$\text{Donc } y(t) = z(t)e^{3t}$$

$$y'(t) = z'(t)e^{3t} + 3z(t)e^{3t}$$

$$y''(t) = z''(t)e^{3t} + 6z'(t)e^{3t} + 9z(t)e^{3t}$$

y est solution de (E_h)

$$\text{ssi } \forall t \in \mathbb{R}, e^{3t}(z''(t) + 6z'(t) + 9z(t) - z'(t) - 12z(t) + 3z(t)) = 0$$

$$\text{ssi } \forall t \in \mathbb{R}, z''(t) + 2z'(t) = 0$$

On pose $u = z'$

u est solution de $u' + 2u = 0$ sur $\mathbb{R}$. Donc pour $t \in \mathbb{R}$, $u(t) = C \cdot e^{-2t}$, $C \in \mathbb{R}$

Donc pour $t \in \mathbb{R}$ $z(t) = \alpha e^{-2t} + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\text{Ainsi, pour } t \in \mathbb{R}, y(t) = \alpha e^t + \beta e^{3t}$$

3) Déterminer une solution de l'équation complète, de la forme $y(t) = \alpha(t)e^{3t} + \beta(t)e^t$

(On pourra supposer que $\alpha'(t)e^{3t} + \beta'(t)e^t = 0 \quad \forall t$)

$$\text{Pour } t \in \mathbb{R}, y(t) = \alpha(t)e^{3t} + \beta(t)e^t$$

$$y'(t) = \alpha'(t)e^{3t} + 3\alpha(t)e^{3t} + \beta'(t)e^t + \beta(t)e^t$$

$$y''(t) = 3\alpha'(t)e^{3t} + 9\alpha(t)e^{3t} + \beta'(t)e^t + \beta(t)e^t$$

y est solution de (E)

$$\text{ssi } \forall t \in \mathbb{R}, (3\alpha'(t) + 9\alpha(t))e^{3t} + (\beta'(t) + \beta(t))e^t - 4(3\alpha(t)e^{3t} + \beta(t)e^t) + 3(\alpha(t)e^{3t} + \beta(t)e^t) = (2t+1)e^{-t}$$

$$\text{ssi } \forall t \in \mathbb{R} \quad e^{3t} 3\alpha'(t) + e^t \beta'(t) = (2t+1)e^{-t}$$

Donc α et β sont solution du système pour $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} 3e^{3t}\alpha'(t) + e^t\beta'(t) = (2t+1)e^{-t} \\ e^{3t}\alpha'(t) + e^t\beta'(t) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2e^{3t}\alpha'(t) = (2t+1)e^{-t} \\ \beta'(t) = -e^{2t}\alpha'(t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha'(t) = \frac{1}{2}(2t+1)e^{-4t} \\ \beta'(t) = -\frac{1}{2}(2t+1)e^{-2t} \end{cases}$$

$(C=0)$

$$\text{donc } \alpha(t) = \frac{1}{2} \int^t (2s+1)e^{-4s} ds = \frac{1}{2}(2t+1)\frac{e^{-4t}}{-4} - \frac{1}{2} \int^t \frac{2e^{-4s}}{-4} ds$$

$$= -\frac{1}{8}(2t+1)e^{-4t} + \frac{1}{4} \frac{e^{-4t}}{-4} = -\left(\frac{t}{4} + \frac{3}{16}\right)e^{-4t}$$

$$\text{et } \beta(t) = -\frac{1}{2} \int^t (2s+1)e^{-2s} ds$$

$$= -\frac{1}{2}(2t+1)\frac{e^{-2t}}{-2} + \frac{1}{2} \int^t 2 \frac{e^{-2s}}{-2} ds = \frac{1}{4}(2t+1)e^{-2t} - \frac{1}{2} \frac{e^{-2t}}{-2} = \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\right)e^{-2t}$$

Donc une solution particulière de (E) est

$$\begin{aligned} y_p(t) &= -\left(\frac{t}{4} + \frac{3}{16}\right)e^{-t} + \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\right)e^{-t} \\ &= \left(\frac{t}{4} + \frac{5}{16}\right)e^{-t} \end{aligned}$$

Donc les solutions de (E) sont de la forme (R, y) avec, pour $t \in \mathbb{R}$

$$y(t) = \left(\frac{t}{4} + \frac{5}{16}\right)e^{-t} + \alpha e^t + \beta e^{3t} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Exo 2.4:

3) $y'' + 4y = \tan(x)$ sur $] -\pi/2, \pi/2 [$

(EH): $y'' + 4y = 0$

On résout l'équation caractéristique: $\lambda^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2i \text{ ou } \lambda = -2i$

On pose pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, z(x) = e^{-2ix} y(x)$

$$\Leftrightarrow y(x) = e^{2ix} z(x)$$

Donc pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, y'(x) = 2iz(x)e^{2ix} + z'(x)e^{2ix}$

$$y''(x) = -4z(x)e^{2ix} + 4iz'(x)e^{2ix} + z''(x)e^{2ix}$$

Donc y est solution de (EH) ssi pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,$

$$e^{2ix}(z''(x) + 4iz'(x)) = 0$$

$$\text{ssi } z'' + 4iz' = 0 \text{ sur }]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,$$

Donc pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, z'(x) = Ce^{-4ix}, C \in \mathbb{C}$

$$\hookrightarrow z(x) = \alpha e^{-4ix} + \beta \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C})$$

Donc les solutions de (EH) sont de la forme $y(x) = C_- e^{-2ix} + C_+ e^{2ix}$ pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,$ et $C_+, C_- \in \mathbb{C}$

On cherche une solution particulière de (E)

On pose, pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, y(x) = C_-(x)e^{-2ix} + C_+(x)e^{2ix}$

$$y'(x) = C'_-(x)e^{-2ix} - 2iC_-(x)e^{-2ix} + C'_+(x)e^{2ix} + 2iC_+(x)e^{2ix}$$

On suppose $C'_-(x)e^{-2ix} + C'_+(x)e^{2ix} = 0 \quad \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,$

$$\text{donc } y'(x) = -2iC_-(x)e^{-2ix} + 2iC_+(x)e^{2ix}$$

$$y''(x) = -2iC'_-(x)e^{-2ix} - 4C_-(x)e^{-2ix} + 2iC'_+(x)e^{2ix} - 4C_+(x)e^{2ix}$$

Donc y sol de (E) ssi

$$\text{pour } x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, -2iC'_-(x)e^{-2ix} - 4C_-(x)e^{-2ix} + 2iC'_+(x)e^{2ix} - 4C_+(x)e^{2ix}$$

$$+ 4C_-(x)e^{-2ix} + 4C_+(x)e^{2ix} = \tan(x)$$

$$\text{ssi } \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, 2i(C'_+(x)e^{2ix} - C'_-(x)e^{-2ix}) = \tan(x)$$

résolution du système

Donc (C_+, C_-) est solution du système pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[:$

$$\begin{cases} 2iC'_+(x)e^{2ix} - 2iC'_-(x)e^{-2ix} = \tan(x) \\ C'_+(x)e^{2ix} + C'_-(x)e^{-2ix} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4iC'_+ e^{2ix} = \tan(x) \\ C'_-(x) = -C'_+(x)e^{4ix} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C'_+(x) = \frac{-i}{4}e^{2ix}\tan(x) \\ C'_-(x) = \frac{i}{4}e^{2ix}\tan(x) \end{cases}$$

Exo 2.5 et 2.6

Exo 2.5:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 8y_2 + e^t \\ y_2' = y_2 = 2y_1 + y_2 + e^{-3t} \end{cases}$$

$$1) Y' = AY + B(t), A \in M_2(\mathbb{R}), B: \mathbb{R} \rightarrow M_{2,1}(\mathbb{R})$$

$$\text{On pose } A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, Y := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ et } B(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-3t} \end{pmatrix}$$

Le système s'écrit bien $Y' = AY + B(t)$

$$2) \text{ Il } \exists P \text{ inversible et } D \text{ diagonale tq } A = PDP^{-1}$$

valeurs propres:

$$\lambda \in \mathbb{R}$$

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 8 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 16 = ((\lambda-1)-4)((\lambda-1)+4) = (\lambda+3)(\lambda-5)$$

→ deux valeurs propres distinctes: $\lambda = 5$ et $\lambda = -3$

Donc A est diagonalisable

vecteurs propres: $\text{Ker}(A - 5I) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

$$= \text{Ker} \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{2}L_1$

$$\text{Ker}(A + 3I) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

matrice P :

$$\text{On a } A = PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \end{matrix}$$

$$\text{Je calcule } P^{-1}: \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 2 & -1/2 & 1 \end{array} \right) \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \quad \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/4 & 1/2 \end{array} \right) \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/4 & 1/2 \end{array} \right)$$

$$\text{donc } P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3) Z := P^{-1}Y. \text{ Il } q Y \text{ sol ssi } Z \text{ sol d'un autre système facile à résoudre.}$$

$Z(t)$: $Z'(t) = P^{-1}Y'(t)$

$$= P^{-1}(AY(t) + B(t)) = P^{-1}APZ(t) + P^{-1}B(t)$$

$$= DZ(t) + P^{-1}B(t)$$

équation homogène associée: $Z'(t) = DZ(t)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_1'(t) = 5z_1(t) \\ z_2'(t) = -3z_2(t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_1(t) = C_1 e^{5t} \\ z_2(t) = C_2 e^{-3t} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow Z(t) = \begin{pmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = e^{tD} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

équation complète:

$$\text{Soit } Z \in C^1 \text{ et } \omega(t) = e^{-tD} Z(t)$$

$$\begin{aligned} \omega'(t) &= -De^{tD} Z(t) + e^{-tD} Z'(t) \\ &= -De^{tD} Z(t) + e^{-tD} (DZ(t) + P^{-1}B(t)) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \omega'(t) = e^{-tD} P^{-1} B(t)$$

$$\text{et } \omega(t) = \int_0^t e^{-sD} P^{-1} B(s) ds + C$$

$$\begin{aligned} \text{Finalement, } Y(t) = PZ(t) &= Pe^{tD} \omega(t) \\ &= Pe^{tD} \int_0^t e^{-sD} P^{-1} B(s) ds + Pe^{tD} C \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow e^{(t-s)D} = \begin{pmatrix} e^{5(t-s)} & 0 \\ 0 & e^{-3(t-s)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} P^{-1}B(s) &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^s \\ e^{-3s} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(e^s + 2e^{-3s}) \\ \frac{1}{4}(-e^s + 2e^{-3s}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } e^{(t-s)D} P^{-1}B(s) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(e^s + 2e^{-3s}) e^{5(t-s)} \\ \frac{1}{4}(-e^s + 2e^{-3s}) e^{-3(t-s)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} e^{5t} (e^{-4s} + 2e^{-8s}) \\ \frac{1}{4} (-e^{4s} + 2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \int_0^t e^{(t-s)D} P^{-1}B(s) ds &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} e^{5t} \int_0^t (e^{-4s} + 2e^{-8s}) ds \\ \frac{1}{4} e^{-3t} \int_0^t (-e^{4s} + 2) ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} e^{5t} \left[\frac{e^{-4s}}{-4} + \frac{2e^{-8s}}{-8} \right]_0^t \\ \frac{1}{4} e^{-3t} \left[\frac{-e^{4s}}{4} + 2s \right]_0^t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exo 2.6:

$$(4): y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0$$

1) Mg y sol de (4) sur $\mathbb{R}$ ssi $y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}$ sol de $y' = Ay$; $A \in M_3(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \text{On prend } y &= \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix} \quad y' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0y + 1y' + 0y'' \\ 0y + 0y' + 1y'' \\ 2y - 5y' + 4y'' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix} y \end{aligned}$$

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$