



Plan du Cours

- ch 1. Exemples, Questions
- ch 2. Systèmes linéaires d'équations différentielles
- ch 3. Exemples de méthodes numériques
- ch 4. Equations non-linéaires.

Chapitre 1. ExemplesI. L'équation différentielle la plus simple1) Vocabulaire

Pour décrire des questions de dynamique de population, on est amené à chercher des fonctions $y: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\forall t \in I, y'(t) = ay(t)$.

La fonction y représente le nombre d'individus au cours du temps $t \in I$. L'équation dit que la vitesse à laquelle la population change est proportionnelle au nombre d'individus.

a représente le 'taux de natalité'

* On écrit ce problème sous la forme :

$$(i) y' = f(t, y) = ay, \text{ avec } f: I \times U \rightarrow \mathbb{R} \text{ donnée par } f(t, x) = ax.$$

où $U \subset \mathbb{R}$ et $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle, et f continue sur $I \times U$

Résoudre l'équation (i) c'est trouver les couples (J, y) constitués d'un intervalle $J \subset I$ et d'une fonction $y: J \rightarrow \mathbb{R}$ tq :

- i) $y \in C^1(J)$
- ii) $\forall t \in J, y(t) \in U$
- iii) $\forall t \in J, y'(t) = f(t, y(t))$

On ne s'intéresse qu'aux solutions maximales

2) Résolution de (1)

Soit $a \in \mathbb{R}$. L'équation différentielle sur $I = \mathbb{R}$ donnée par $y' = ay$ (*) a pour solutions les $(I, t \mapsto Ce^{at})$ avec $c \in \mathbb{R}$

pv: Supposons que (J, y) soit une solution, avec $J \subset I$ et $y: J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^1

Cette équation (*) s'écrit $y' = f(t, y)$ avec $f: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t, x) = ax$.

Il suffit donc de satisfaire iii.

Supposons que $y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit $w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $w(t) = e^{-at}y(t)$.

$$\text{On a } w'(t) = -ae^{-at}y(t) + e^{-at}y'(t) = e^{-at}(y'(t) - ay(t))$$

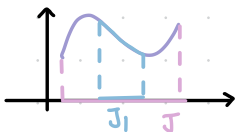
Ainsi, (J, y) vérifie iii ssi (J, w) vérifie : $\forall t \in J, w'(t) = 0$.

Autrement dit, (J, y) vérifie iii ssi $w(t) = c$ pour un $c \in \mathbb{R}$ quelconque.

On obtient donc (J, y) vérifie iii ssi $(J, y) = (J, t \mapsto Ce^{at})$ pour un $c \in \mathbb{R}$

Concernant J , le raisonnement ci-dessus ne restreint pas son choix. En particulier, on peut prendre $J = I = \mathbb{R}$.

Rq: si $J_1 \subset J$ et (J, y) est une solution de (*), alors $(J_1, y|_{J_1})$ est encore une solution



DEF: On dit que (J, y) est une solution maximale de l'équation $y' = f(t, y)$ avec $f: I \times U \rightarrow \mathbb{R}$ lorsque (J, y) n'est pas la restriction à J d'une solution (\tilde{J}, \tilde{y}) avec $\tilde{J} \subsetneq J$ et $\tilde{y}|_J = y$.

Autrement dit, (J, y) est maximale s'il est impossible de la prolonger en une solution (\tilde{J}, \tilde{y})

Dans le cas de (*) $y' = ay$ on a déterminé toutes les solutions maximales $(\mathbb{R}, t \mapsto Ce^{at})$

II. Les équations diff. linéaires d'ordre 1

DEF: une EDL¹ est une équation différentielle de la forme (2) $y' = a(t)y + b(t)$, avec $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues
On note que (2) s'écrit $y' = f(t, y)$ avec $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(t, x) = a(t)x + b(t)$

À $t \in I$ fixé, l'application $x \mapsto f(t, x)$ est affine.

Lorsque $b \equiv 0$, $t \mapsto f(t, x) = a(t)x$ est linéaire.

Dans ce cas, on dit que l'équation différentielle $y' = f(t, y)$ est linéaire homogène.

PROP: Les solutions maximales de (2) sont exactement les $(I, t \mapsto Ce^{A(t)} + \int_{t_0}^t e^{A(t)-A(s)} b(s) ds)$
où $t_0 \in I$ fixé et $A(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds$ et $c \in \mathbb{R}$ quelconque.

~pv: Soit (J, γ) une solution maximale de (2).

On a $\gamma \in C(J, \mathbb{R})$ et $\forall t \in J$, $\gamma'(t) = a(t)\gamma(t) + b(t)$

Soit $w(t) = e^{-A(t)}\gamma(t)$, où $A(t)$ est une primitive de a sur J : $A(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds$ où $t_0 \in J$ fixé

On a, pour tout $t \in J$,

$$w'(t) = -a(t)e^{-A(t)}\gamma(t) + e^{-A(t)}\gamma'(t) \\ = e^{-A(t)}(\gamma'(t) - a(t)\gamma(t))$$

$$= e^{-A(t)}b(t)$$

Donc il existe $c \in \mathbb{R}$ tq

$$w(t) = \int_{t_0}^t e^{-A(s)}b(s) ds + c$$

Ainsi, on a $\gamma(t) = e^{A(t)}w(t) = Ce^{A(t)} + e^{A(t)} \int_{t_0}^t e^{-A(s)}b(s) ds$ pour un $c \in \mathbb{R}$.

Réciproquement, si $\gamma(t) = Ce^{A(t)} + e^{A(t)} \int_{t_0}^t e^{-A(s)}b(s) ds$, on trouve ... $\gamma'(t) = a(t)\gamma(t) + b(t)$

D'autre part, on peut prendre $J = I$, d'où le fait que les solutions maximales sont de la forme

$$(I, t \mapsto Ce^{A(t)} + \int_{t_0}^t e^{A(t)-A(s)} b(s) ds)$$

DEF: Soit $f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On dit qu'une solution (J, γ) de l'équation $y' = f(t, y)$ est globale lorsque $J = I$

rq: Les solutions globales sont maximales. Attention, la réciproque est fautive en générale.

III. Un exemple non linéaire:

On considère l'ED (3) $y' = y^2$. Plus précisément, on considère l'équation $y' = f(t, y)$ avec $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(t, x) = x^2$

DEF: une équation différentielle $y' = f(t, y)$ où f ne dépend pas de t est appelée équation différentielle autonome

On cherche les solutions maximales (J, γ) de (3)

1) Recherche des solutions qui ne s'annulent pas

On suppose que (J, γ) vérifie (3) et que $\gamma(t) \neq 0$ pour tout $t \in J$. On a $\gamma'(t) = \gamma(t)^2$ pour tout $t \in J$, donc $\frac{\gamma'(t)}{\gamma^2(t)} = 1$ pour tout $t \in J$.

Ainsi, $-1/y(t) = t + c$ pour un $c \in \mathbb{R}$

Donc $y(t) = \frac{-1}{t+c}$ pour un $c \in \mathbb{R}$

Mais cette fonction n'est pas définie en $t = -c$.

Donc au mieux, on peut prendre $J_+ =]-c, +\infty[$ ou $J_- =]-\infty, -c[$

On a trouvé deux familles de solutions maximales. $(J_+, t \mapsto \frac{-1}{t+c})$ et $(J_-, t \mapsto \frac{-1}{t+c})$ avec $c \in \mathbb{R}$

Elles ne sont pas globales.

* Les solutions maximales des E.L. sont toujours globales (tout peut se produire pour des équations non-linéaires)

2) Cas des solutions qui s'annulent.

Cette fois-ci, on suppose que (J, y) est une solution de (3) et qu'il existe au moins un $t_0 \in J$ tel que $y(t_0) = 0$

On remarque que $(I, 0)$ est une solution de (3) qui rentre dans ce cadre.

On va montrer que c'est la seule.

→ On peut supposer que $t_0 = 0$. En effet, je pose $z(t) = y(t + t_0)$.

On a $z'(t) = y'(t + t_0) = y(t + t_0)^2 = z(t)^2$. Donc $(J - t_0, z)$ est solution de (3) et $z(0) = y(t_0) = 0$

→ On a $z(0) = 0$ et $z'(0) = z(0)^2 = 0$. De plus, $z'(t) \geq 0 \forall t$, donc z est croissante.

* Ou bien z est identiquement nulle et on retrouve la solution $(I, 0)$

* Ou bien $\begin{cases} \exists T > 0 \text{ tq } z(T) > 0 \text{ (*)} \\ \exists T < 0 \text{ tq } z(T) < 0 \end{cases}$

On se place dans le cas (*). Pour $t \in [0, T]$ on a $0 \leq z(t) \leq z(T)$

donc $0 \leq z'(t) \leq z(t)z(t) \leq \underbrace{z(T)}_a z(t)$

Soit $a = z(T)$, on a $z'(t) \leq az(t)$

Donc $(e^{-at} z(t))' = -ae^{-at} z(t) + e^{-at} z'(t) = e^{-at} (z'(t) - az(t)) \leq 0$

En particulier, $e^{-at} z(t) \leq e^{-a \cdot 0} z(0) \leq 0$

Donc $z(t) \leq 0$ pour tout $t \in [0, T]$. Mais comme $z(T) > 0$, c'est absurde.

CCL: Les solutions maximales de (3) sont

- $(I, 0)$ globale
- $(J_-, t \mapsto \frac{-1}{t+c})$; $c \in \mathbb{R}$ pas globale
- $(J_+, t \mapsto \frac{-1}{t+c})$; $c \in \mathbb{R}$, pas globale

IV. Notion de problème de Cauchy

PROP: [unicité dans un cas facile]

On considère $I \in \mathbb{D}$ $y' = f(t, y)$ où $f: I \times U \rightarrow \mathbb{R}$ est continue. On se donne $t_0 \in I$, $x_0 \in U$.

Si f est $C^1(I \times U)$ alors le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases}$

admet une unique solution maximale (J, y) avec $t_0 \in J$

PROP: [Cauchy - Lipschitz - faible]

Soit $f: I \times U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Soit $t_0 \in I$ et $x_0 \in U$.

Si f est C^1 sur $I \times U$ alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admet une unique solution maximale (J, y) avec $t_0 \in J$

Exemple: On considère l'EO $y' = Ky - y^2$, avec $K > 0$

Cette équation s'écrit $y' = f(t, y)$, avec f donnée par $f(t, x) = Kx - x^2$, $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($I = \mathbb{R}, U = \mathbb{R}$)

Cette fonction f est C^1 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (c'est un polynôme sur (t, x) qui ne dépend pas de t)

On cherche toutes les solutions maximales de (1)

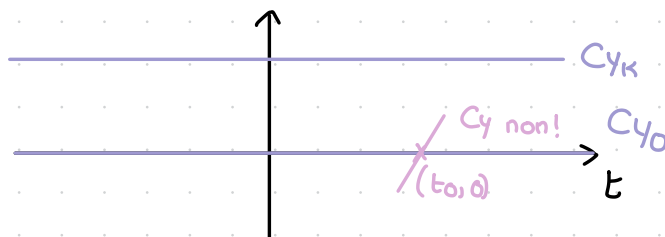
a) Recherche des solutions constantes

$(\mathbb{R}, t \mapsto a)$ est une solution de (1) ssi

$$\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) = Ky(t) - y(t)^2 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, 0 = Ka - a^2 \Leftrightarrow a(K-a) = 0$$

Donc $(\mathbb{R}, t \mapsto 0)$ et $(\mathbb{R}, t \mapsto K)$ sont des solutions

Figure: graphe des solutions



b) Soit (J, y) une solution maximale non constante.

Peut-on avoir $y(t_0) = 0$ pour un $t_0 \in J$?

Supposons que ce soit le cas. Alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = 0 \end{cases} \text{ admet 2 solutions maximales: } (\mathbb{R}, y_0) \text{ et } (J, y).$$

Cela contredit le TCL.

Peut-on avoir $y(t_0) = K$? non pour la même raison.

→ À partir de maintenant je suppose que $t_0 = 0$ (l'équation est autonome), et je considère le problème

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(0) = x_0 \end{cases}$$

* si $x_0 = 0$ (resp. $x_0 = K$) la solution maximale est (\mathbb{R}, y_0) (resp. (\mathbb{R}, y_K))

* si $x_0 < 0$, la solution maximale (J, y) vérifie $y(t) < 0$ pour tout $t \in J$

* si $0 < x_0 < K$, la solution maximale (J, y) vérifie $0 < y(t) < K$ pour tout $t \in J$

* si $x_0 > K$, _____ vérifie $y(t) > K$ pour tout $t \in J$

c) Calcul des solutions maximales.

Soit (J, y) la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = Ky - y^2 \\ y(0) = x_0 \end{cases}$$

cas 1: $x_0 \in]0, K[$

On a: $\forall t \in J, y'(t) = Ky(t) - y^2(t) = y(t)(K - y(t))$

comme $y(t) \in]0, K[$ pour tout t , on a $\frac{y'(t)}{y(t)(K-y(t))} = 1$

or $\frac{1}{x(K-x)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{K-x}$ avec $a = 1/K$, $b = 1/K$

Donc on a, pour tout $t \in \mathcal{J}$ $\frac{y'(t)}{y(t)} + \frac{y'(t)}{K-y(t)} = K$

Donc il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $\ln|y(t)| - \ln|K-y(t)| = K.t + c$

Puisque $y(t) \in]0, K[$, cela équivaut à $\ln y(t) - \ln(K-y(t)) = Kt + c$
 $\frac{y(t)}{K-y(t)} = C_1 e^{Kt}$ pour un $C_1 \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow y(t) = C_1 e^{Kt} (K-y(t))$
 $\Leftrightarrow (C_1 e^{Kt} + 1) y(t) = K C_1 e^{Kt}$
 $\Leftrightarrow y(t) = \frac{K C_1 e^{Kt}}{1 + C_1 e^{Kt}}$

De plus, $y(0) = x_0$. Donc $\frac{K C_1}{1 + C_1} = x_0 \Leftrightarrow C_1 = \frac{x_0}{K-x_0}$

Finalement, $y(t) = \frac{K x_0}{K-x_0} e^{Kt} \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{x_0}{K-x_0} e^{Kt}} \right)$
 $= \frac{K x_0 e^{Kt}}{(K-x_0) + x_0 e^{Kt}}$

Puisque cette fonction est C^1 sur \mathbb{R} , $\mathcal{J} = \mathbb{R}$ (\rightarrow la solution maximale est globale)

Exercice: Etudiez les cas 2 et 3 : $x_0 > K$ et $x_0 < 0$

V. Equations différentielles d'ordre supérieur:

DEF. Une équation différentielle d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ s'écrit

$y^{(n)} = F(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ où $F: I \times U \rightarrow \mathbb{R}$, avec $U \subset \mathbb{R}^n$ est continue

Résoudre cette équation, c'est trouver tous les couples (\mathcal{J}, y) constitués d'un intervalle $\mathcal{J} \subset I$

et d'une fonction $y: \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

- i) y est de classe C^n sur \mathcal{J}
- ii) $\forall t \in \mathcal{J}, (y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \in U$
- iii) $\forall t \in \mathcal{J}, y^{(n)}(t) = F(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$

Exemple: $m x''(t) = F(t, x(t))$ équation de Newton

2) On peut ramener à un système d'ordre 1

PROP: Soit $F: I \times U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, avec $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle de $U \subset \mathbb{R}^n$.

Soit $G: I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $G(t, x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ F(t, x_1, \dots, x_{n-1}) \end{pmatrix}$

i) Si (\mathcal{J}, y) est une solution de l'équation d'ordre n $y^{(n)} = F(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$
 alors (\mathcal{J}, γ) où $\gamma: t \mapsto \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$ est solution du système différentiel d'ordre 1 $\gamma' = G(t, \gamma)$

ii) réciproquement, si (\mathcal{J}, γ) est une solution de $\gamma' = G(t, \gamma)$ alors notant $\gamma(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$, (\mathcal{J}, y_1) est une solution de $y^{(n)} = F(t, y_1, \dots, y^{(n-1)})$

Preuve: Supposons que (\mathcal{J}, γ) soit solution de $\gamma^{(n)} = F(t, \dots)$

Soit $\gamma(t) = (\gamma(t), \gamma'(t), \dots, \gamma^{(n-1)}(t))$

$$\text{On a } G(t, \gamma(t)) = \begin{pmatrix} \gamma'(t) \\ \gamma''(t) \\ \vdots \\ \gamma^{(n-1)}(t) \\ F(t, \dots) \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \gamma'(t) = \begin{pmatrix} \gamma'(t) \\ \gamma''(t) \\ \vdots \\ \gamma^{(n)}(t) \end{pmatrix}$$

Donc on a bien $\gamma'(t) = G(t, \gamma(t))$

ii) Supposons que (\mathcal{J}, γ) soit une solution de $\gamma' = G(t, \gamma)$

$\gamma: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$, donc on peut écrire $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix}$ où les γ_j sont les composantes de γ

$$\text{On a } \gamma'(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t) \end{pmatrix} = G(t, \gamma(t)) = \begin{pmatrix} \gamma_2(t) \\ \gamma_3(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \\ F(t, \gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} \gamma_1'(t) = \gamma_2(t) \\ \gamma_2'(t) = \gamma_3(t) \\ \vdots \\ \gamma_{n-1}'(t) = \gamma_n(t) \\ \gamma_n'(t) = F(t, \gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \end{cases}$$

Cela entraîne que $\gamma_1^{(n-1)}(t) = \gamma_n(t)$ et $\gamma_1^{(n)}(t) = F(t, \dots)$

Donc γ_1 est solution de $\gamma^{(n)} = F(t, \gamma, \gamma', \dots, \gamma^{(n-1)})$

utilité:

- ① Pour résoudre les équations d'ordre peu élevé, on peut parfois se ramener à un système d'ordre 1
- ② Transposer les résultats théoriques à propos des équations d'ordre 1 vers les équations d'ordre n

Par exemple,

Proposition (Thm de CL version faible - ordre n)

Soit $F: \mathcal{I} \times U \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $U \subset \mathbb{R}^n$ une fonction continue. C^1

Soit $t_0 \in \mathcal{I}$ et $x_0 \in U$.

Le pb de Cauchy $\begin{cases} \gamma^{(n)} = F(t, \gamma, \gamma', \dots, \gamma^{(n-1)}) \\ (\gamma(t_0), \gamma'(t_0), \dots, \gamma^{(n-1)}(t_0)) = x_0 \end{cases}$

admet une unique solution maximale (\mathcal{J}, γ)

ch 2. systèmes différentiels linéaires

I. Généralités:

i) Définition: On appelle système différentiel linéaire une équation différentielle de la forme $Y' = F(t, Y)$ où $F: I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ avec $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $U \subset \mathbb{R}^n$ est une fonction continue.

Résoudre ce système, c'est trouver tous les couples (J, γ) constitués d'un intervalle $J \subset I$ et d'une fonction $\gamma: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que:

- i) $\gamma \in C^1(J)$
- ii) $\forall t \in J, \gamma(t) \in U$
- iii) $\forall t \in J, \gamma'(t) = F(t, \gamma(t))$

Le système est dit linéaire lorsque $F(t, x) = A(t)x + B(t)$ avec $A: I \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ et $B: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ continues.

Exemple:
$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ t^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \text{"} & \text{"} & \text{"} & \text{"} \\ \psi'(t) & A(t) & \gamma & B(t) \end{matrix}$$

Vocabulaire: si $B \equiv 0$, on dit que le système est homogène. si $A(t)$ ne dépend pas de t , on dit qu'il s'agit d'un système à coefficients constants.

Exemple (Lotka-Volterra)

$$\begin{cases} y_1' = a y_1 - b y_1 y_2 & a, b, c, d > 0 \\ y_2' = -c y_2 + d y_1 y_2 \end{cases}$$

Attention: ce système différentiel n'est pas linéaire.

II. Exponentielle de matrice:

i) Norme matricielle

Soit $E = \mathbb{C}^n = \{(x_1, \dots, x_n), x_j \in \mathbb{C}\}$

On note $\|x\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j|$ pour $x \in \mathbb{C}^n$ $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2}$ $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$

Ce sont trois normes sur \mathbb{C}^n , qui sont équivalentes.

On fixe $\|\cdot\|$ parmi ces 3 normes

DEF: Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$, je note $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$

PROP: L'application $M: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $M(A) = \|A\|$ est une norme.

On a de plus $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$

Enfin, $(M_n(\mathbb{C}), \|\cdot\|)$ est un evn complet de dimension n^2 comme espace vectoriel sur \mathbb{C}

REM: * $\|A\| = \sup \|Ax\| < +\infty$

* N est une norme (facile)

$$* \|AB\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|ABx\|}{\|x\|}$$

or $\|ABx\| = \|Ay\|$ où $y = Bx$

Il suffit donc de ma $\|Ay\| \leq \|A\| \|y\|$ puisqu'alors $\|ABx\| = \|Ay\| \leq \|A\| \|y\| \leq \|A\| \|Bx\| \leq \|A\| \|B\| \|x\|$

Ce qui donne, pour $x \neq 0$, $\frac{\|ABx\|}{\|x\|} \leq \|A\| \|B\|$

$$\Rightarrow \sup_{x \neq 0} \frac{\|ABx\|}{\|x\|} \leq \|A\| \|B\|$$

Comme $\forall y \neq 0$, $\frac{\|Ay\|}{\|y\|} \leq \|A\|$ (sup), on a bien $\|Ay\| \leq \|A\| \|y\| \forall y \neq 0$

Cette ineq est aussi vraie pour $y=0$

Systèmes différentiels linéaires

I. Exponentielle d'une matrice

- 1) Normes matricielles
- 2) Définitions, exemples.

PROP: Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn complet. Si la série de terme général u_n converge absolument, alors elle converge $\sum \|u_n\|$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge

DEF: Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$

On note $e^A = \exp(A)$ la somme de la série absolument convergente $\sum_{n \geq 0} \frac{A^n}{n!}$

PREUVE: (de la série est absolument convergente.)

$$\frac{\|A^n\|}{n!} \leq \frac{\|A\|^n}{n!}$$

↑ car on a choisi une norme matricielle

Donc la série $\sum_{n \geq 0} \frac{\|A^n\|}{n!}$ est majorée par la série $\sum_{n \geq 0} \frac{r^n}{n!}$ avec $r = \|A\|$

C'est la valeur en $\|A\|$ de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{r^n}{n!}$ dont le rayon de convergence est $+\infty$.

Au passage, $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$

Ex: $A = 0$ (la matrice nulle)

$$e^A = \sum_{n \geq 0} \frac{0^n}{n!} = I + 0 = I$$

par convention, $0^0 = I$

* Soit A une matrice diagonalisable

Il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ telles que $A = PDP^{-1}$

$$\text{On veut calculer } e^A = \sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!}$$

$$\text{or } A^k = (PDP^{-1})^k$$

$$A^0 = I, \quad A^1 = PDP^{-1}, \quad A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD(P^{-1}P)DP^{-1} = PD^2P^{-1}$$

Par récurrence, $A^k = PD^kP^{-1}$

$$e^A = \sum_{k \geq 0} PD^kP^{-1} = P \left(\sum_{k \geq 0} \frac{D^k}{k!} \right) P^{-1} = Pe^D P^{-1}$$

$$\text{De plus, } e^D = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k \geq 0} \frac{\lambda_1^k}{k!} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{k \geq 0} \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

* Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$

Cette matrice n'est pas diagonalisable. Néanmoins, on peut calculer son exponentielle :

$$e^A = \sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!}$$

$$A^0 = I, A^1 = A, A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc $A^k = 0$ pour tout $k \geq 2$

$$\text{Ainsi, } e^A = I + A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

DEF: Soit $N \in M_n(\mathbb{C})$. On dit que N est nilpotente d'ordre $p \in \mathbb{N}$ lorsque :

$$N^p = 0 \text{ et } N^{p-1} \neq 0$$

\times nilpotente d'ordre au plus p sans cette cond

$$\text{alors } e^N = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{N^k}{k!} \text{ (somme finie)}$$

IDÉE: On essaye d'écrire $A = \Delta + N$ avec Δ diagonalisable, N nilpotente

attention:

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}. \text{ Essayons } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Mais } e^A = e^{\Delta+N} \neq e^\Delta e^N$$

le problème, c'est que $\Delta N \neq N\Delta$, et donc $e^{\Delta+N} \neq e^\Delta e^N$

{ Ici, la bonne décomposition est $A = \overset{\substack{\uparrow \\ \text{diagonalisable}}}{A} + \overset{\substack{\uparrow \\ \text{nilpotente}}}{N}$



PROP: Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Si A et B commutent ($AB=BA$), alors $e^{A+B} = e^A e^B$

PREUVE: D'après la formule du binôme de Newton, puisque A et B commutent, on a

$$(A+B)^k = \sum_{j=0}^k \frac{k!}{j!(k-j)!} A^j B^{k-j}$$

$$= k! \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!(k-j)!} A^j B^{k-j}$$

$$\text{or } e^{A+B} = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} (A+B)^k = \sum_{k \geq 0} \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!(k-j)!} A^j B^{k-j}$$

$$= \sum_{k \geq 0} \sum_{j=0}^k \frac{A^j}{j!} \frac{B^{k-j}}{(k-j)!}$$

$n=k-j$

$$\stackrel{?}{=} \sum_{n \geq 0} \sum_{j=0}^n \frac{A^j}{j!} \frac{B^n}{n!}$$

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{B^n}{n!} \sum_{j \geq 0} \frac{A^j}{j!} = e^A e^B$$

3) Décomposition de Jordan-Chevalley

PROP: Soit $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ une application linéaire. Il existe un unique couple (d, n) d'applications linéaires telles que

- i) d diagonalisable, n nilpotente
- ii) d et n commutent
- iii) $f = d + n$

(On trouve aussi le nom de Décomposition de Donford)
 La preuve de ce théorème repose sur le lemme des noyaux

DEF: Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, et $p_A(x)$ son polynôme caractéristique ($p_A(x) = \det(A - xI)$)
 - On dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A lorsque $p_A(\lambda) = 0$. La multiplicité algébrique de λ est l'ordre de λ comme 0 de p_A .

$$p_A(x) = (-1)^n \prod_{j=1}^d (x - \lambda_j)^{m_j}$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ sont les valeurs propres distinctes de A
 m_j est la multiplicité algébrique (m. a.) de λ_j .

- Le sous-espace vectoriel $\text{Ker}(A - \lambda_j I)$ est le sous-espace propre associé à λ_j
 Ses éléments non-nuls sont les vecteurs propres de A associés à λ_j .

PROP: Si $\dim E_j = m_j$, alors A est diagonalisable.

PREUVE: Soit $(e_1^j, \dots, e_{m_j}^j)$ une base de E_j
 Pour $x \in E_j$, $A(x) = A\left(\sum_{k=1}^{m_j} x_k e_k^j\right)$

$$= \sum_{k=1}^{m_j} x_k A(e_k^j) = \sum_{k=1}^{m_j} \lambda_j x_k e_k^j = \lambda_j x$$

Soit alors $B = \bigcup_{j=1}^d B^j = (e_1^1, \dots, e_{m_1}^1, e_1^2, \dots, e_{m_2}^2, \dots)$

B contient $m_1 + m_2 + \dots + m_j$ vecteurs indépendants. Or $m_1 + m_2 + \dots + m_d = \deg p_A = n$
 donc B est une base de \mathbb{C}^n . ($\mathbb{C}^n = \bigoplus_{j=1}^d E_j$)

De plus, $\text{Mat}_{B \leftarrow B} A = \begin{pmatrix} A e_1^1 & A e_{m_1}^1 & \dots & A e_1^d & \dots & A e_{m_d}^d \\ \lambda_1 & & & & & \\ & & \lambda_2 & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \lambda_d \\ & & & & & \\ & & & & & \lambda_d \\ & & & & & \\ & & & & & \lambda_d \end{pmatrix} \begin{matrix} \beta \\ e_1^1 \\ e_2^1 \\ \vdots \\ e_{m_1}^1 \\ \vdots \\ e_1^d \\ \vdots \\ e_{m_d}^d \end{matrix}$

Ce qui prouve que A est diagonalisable.

REM: on voit en particulier que $m_j = \dim E_j \leq m_j$ pour $j = 1, \dots, d$

DEF: La multiplicité géométrique μ_j de λ_j est la dimension de E_j

DEF: Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ ses valeurs propres ($2 \leq d \leq n$)

On appelle sous-espace propre généralisé associé à λ_j le $G_j = \text{Ker}(A - \lambda_j I)^{m_j}$, $\dim G_j = m_j$
 caractéristique

PROP: (Lemme des noyaux)

$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{j=1}^d G_j$. Il suffit donc d'étudier $A|_{G_j}$ pour chaque $j \in \{1, \dots, d\}$

exemple: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C})$

son polynôme caractéristique est $p_A(x) = ((x-1)^2 + 1)^2 = (x - (1-i))^2 (x - (1+i))^2$

Les valeurs propres de A sont donc $\lambda_1 = 1+i$, $\lambda_2 = 1-i$ $m_1 = 2$, $m_2 = 2$.

→ Les sous-espaces propres associés sont

$$E_1 = \text{Vect}(e_1^1 = (1, 0, -i, 0))$$

$$E_2 = \text{Vect}(e_1^2 = (1, 0, i, 0))$$

En particulier, $\mu_1 = 1$ et $\mu_2 = 1$. Donc A n'est pas diagonalisable.

$$\text{Soit } G_1 = \text{Ker}(A - \lambda_1 I)^2$$

$$G_2 = \text{Ker}(A - \lambda_2 I)^2$$

Les sous-espaces caractéristiques associés

$$* \text{ On sait que } e_i^j \in G_j \quad (A - \lambda_j I)^2 e_i^j = (A - \lambda_j I) \underbrace{(A - \lambda_j I) e_i^j}_0 = 0$$

(en fait, $E_j \subset G_j$ toujours) @@

Je cherche v_i , indépendant de e_i^j appartenant à G_j

$$\text{Je résous } (A - \lambda_1 I) v_1 = e_1^1$$

$$\rightarrow (A - \lambda_1 I)^2 v_1 = (A - \lambda_1 I) e_1^1 = 0$$

→ De plus, si $v_1 = \alpha e_1^1$ on a $e_1^1 = (A - \lambda_1 I) v_1 = (A - \lambda_1 I)(\alpha e_1^1) = \alpha \cdot 0$ absurde.

$$v_1 = (0, 1, 0, -i)$$

De même, (e_1^2, v_2) est une base de G_2 où $v_2 = (0, 1, 0, i)$

$$* \text{ Mat}_{(e_1^1, v_1)} A|_{G_1} = \begin{pmatrix} Ae_1^1 & Av_1 \\ \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1^1 \\ v_1 \end{matrix}$$

$$\text{De même, } \text{Mat}_{(e_1^2, v_2)} A|_{G_2} = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Mat}_{(e_1^1, v_1, e_1^2, v_2)} A = \left(\begin{array}{cc|cc} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc} \lambda_1 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_2 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} N^4 = 0 \\ N, D \text{ commutent} \end{matrix}$$

II. Espaces des solutions d'un système linéaire

1) Définitions:

DEF: Un système différentiel d'ordre 1 s'écrit $y' = F(t, y)$ (*)

où $F: I \times U \rightarrow \mathbb{C}^n$, avec I intervalle de \mathbb{R} et $U \subset \mathbb{R}^n$, est une application continue.

De plus, $F(t, x) = A(t)X + B(t)$, avec $A: I \rightarrow M_n(\mathbb{C})$, $B: I \rightarrow \mathbb{C}$. Si $B \equiv 0$, on dit que le système linéaire est homogène.

Résoudre le système, c'est trouver tous les couples (J, y) où $J \subset I$ est un intervalle et $y: J \rightarrow \mathbb{C}^n$ de classe C^1 telle que

$$\text{i) } \forall t \in J, y(t) \in U$$

$$\text{ii) } \forall t \in J, y'(t) = F(t, y(t))$$

Remarque: $y: J \rightarrow \mathbb{C}^n$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ avec $y_j: J \rightarrow \mathbb{C}$ et $F: I \times U \rightarrow \mathbb{C}^n$, $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$

(*) s'écrit
$$\begin{cases} y_1' = F_1(t, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ y_n' = F_n(t, y_1, \dots, y_n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}' = A(t) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + B(t)$$

2) Théorème de Cauchy-(Lipschitz) linéaire:

PROP: Soit $F: I \times U \rightarrow \mathbb{C}^n$ une application affine continue

Soit $t_0 \in I$ et $x_0 \in U$. Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = F(t, y) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3)$$

admet une unique solution maximale (J, y) . De plus, elle est globale ($J=I$)

PROP: [Thm du point fixe de Picard-Banach]

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé complet

Soit $f: E \rightarrow E$ une application contractante:

$$\text{il existe } K \in [0, 1[\text{ tq } \forall x, y \in E, \|f(x) - f(y)\|_E \leq K \|x - y\|_E$$

Alors f admet un unique point fixe dans E .

il existe un unique $\tilde{x} \in E$ tq $f(\tilde{x}) = \tilde{x}$

à connaître?

preuve: Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ la suite définie par:

$$\begin{cases} x_0 = e \in E \\ x_{n+1} = f(x_n) \quad \forall n \geq 0 \end{cases}$$

→ Supposons que $(x_n)_n$ cv vers un certain $\ell \in E$. Comme f est continue,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n) = f(\ell), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = \ell$$

Dans ce cas, ℓ est un point fixe de f .

→ On mq $(x_n)_n$ converge. On va mq (x_n) est une SDC.

$$(*) \text{ On a } x_{n+1} - x_n = f(x_n) - f(x_{n-1}) \text{ pour } n \geq 1$$

$$\text{Donc } \|x_{n+1} - x_n\| = \|f(x_n) - f(x_{n-1})\| \leq K \|x_n - x_{n-1}\|$$

$$\text{Par récurrence, on obtient } \forall n \geq 0, \|x_n - x_{n-1}\| \leq K^{n-1} \|x_1 - x_0\|$$

* Soit $p, q \in \mathbb{N}$ avec $p < q$.

$$\begin{aligned} \|x_p - x_q\| &= \|x_p - x_{p-1} + x_{p-1} - x_{p-2} + \dots + x_{q+1} - x_q\| \\ &\leq \|x_p - x_{p-1}\| + \|x_{p-1} - x_{p-2}\| + \dots + \|x_{q+1} - x_q\| \\ &\leq (K^{p-1} + K^{p-2} + \dots + K^q) \|x_1 - x_0\| \\ &\leq K^q \frac{1 - K^{p-q}}{1 - K} \|x_1 - x_0\| \\ &\leq \frac{K^q}{1 - K} \|x_1 - x_0\| \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tq $p > q \geq N$, alors $\frac{k^q}{k^p} \leq \frac{\varepsilon}{k}$ donc $\|x_p - x_q\| \leq \varepsilon$
 La suite (x_n) est bien une SDC de E . Elle cv donc vers l un point fixe de f .

→ f ne peut pas avoir deux points fixes distincts.

Si non soit x_1 et x_2 tels que $x_1 \neq x_2$ et $f(x_1) = x_1$, $f(x_2) = x_2$.

$$\text{On a } \|f(x_1) - f(x_2)\| \leq K \|x_1 - x_2\| < \|x_1 - x_2\|$$

c'est absurde.

Preuve du théorème de Cauchy linéaire

* ON transforme l'équation différentielle en sa forme intégrale, (J, γ) est une solution du problème de Cauchy (3)

ssi $\gamma: J \rightarrow \mathbb{C}^n$ est une fonction continue qui vérifie (2) alors γ est dérivable et $\gamma'(t) = A(t)\gamma(t) + B(t)$.

De plus, $\gamma(t_0) = X_0$.

Réciproquement, si (J, γ) vérifie (3) alors $\gamma \in C^1$, donc γ' est continue et

$$\int_{t_0}^t \gamma'(s) ds = \int_{t_0}^t A(s)\gamma(s) + B(s) ds$$

$$\gamma(t) - \gamma(t_0) = \gamma(t) - X_0$$

* Soit $(\gamma_n)_n$ la suite de fonctions définie par

$$\begin{cases} \gamma_0(t) = X_0 \\ \gamma_{n+1}(t) = X_0 + \int_{t_0}^t A(s)\gamma_n(s) + B(s) ds \end{cases}$$

On note que les $\gamma_n \in C^0([a, b], \mathbb{C}^d)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, à condition que $t_0 \in [a, b] \subset I$.

On se souvient que $C^0([a, b], \mathbb{C}^d)$ est un espace vectoriel normé complet pour $\|\cdot\|_\infty$.

→ Supposons que (γ_n) converge vers une fonction γ sur $J \subset I$

Alors $\forall t \in J$.

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1}(t) &= X_0 + \int_{t_0}^t A(s)\gamma_n(s) + B(s) ds \\ \downarrow & \\ \gamma(t) &= X_0 + \int_{t_0}^t A(s)\gamma(s) + B(s) ds \end{aligned}$$

à condition que $(\gamma_n) \rightarrow \gamma$ uniformément sur J .

De plus dans ce cas γ est continue.

→ On travaille pour l'instant dans $J = [t_0, T]$, Je suppose d'ailleurs que $t_0 = 0$.

Donc $J = [0, T]$.

On pose $\omega_n = \gamma_n - \gamma_m$ pour toute $n \geq 1$

$$\omega_1(t) = \gamma_1(t) - \gamma_0(t) = \gamma_1(t) - X_0 = \int_0^t A(s)\gamma_0(s) + B(s) ds$$

$$\text{donc } \|\omega_1(t)\| \leq \int_0^t \|A(s)\gamma_0(s) + B(s)\| ds$$

$$\leq \underbrace{t \sup_{s \in [0, T]} \|A(s)X_0 + B(s)\|}_{= M < +\infty}$$

$$\bullet \omega_2(t) = (\gamma_2 - \gamma_1)(t) = X_0 + \int_0^t A(s)\gamma_1(s) + B(s) ds - \left(X_0 + \int_0^t A(s)\gamma_0(s) + B(s) ds \right)$$

$$= \int_0^t A(s)(\gamma_1(s) - \gamma_0(s)) ds$$

$$= \int_0^t A(s)\omega_1(s) ds$$

$$\begin{aligned} \text{En particulier, } \|\omega_2(t)\| &\leq \sup_{s \in [0, t]} \|A(s)\| \times \int_0^t \|\omega(s)\| ds \\ &\leq \sup_{s \in [0, T]} \|A(s)\| \int_0^t M ds \\ &\leq \hat{A} \overset{\curvearrowright}{=} M \frac{t^2}{2} \end{aligned}$$

Par récurrence on obtient

$$\|\omega_{n+1}(t)\| \leq \hat{A}^n M \frac{t^n}{n!} \quad \forall t \in [0, T]$$

$$\text{Finalement } \|\omega_{n+1}\|_{\infty} \leq \hat{A}^n M \frac{T^n}{n!} \text{ sur } [0, T]$$

Donc la série $\sum \omega_n(t)$ converge normalement sur $[0, T]$ car $M \sum \frac{(\hat{A}T)^n}{n!} < +\infty$.

En particulier cette série converge. Or $\sum_{n=1}^N \omega_n = \sum_{n=1}^N y_n - y_{n-1} = y_N - y_0 \geq 0$

Ainsi, (y_n) cv uniformément sur $[0, T]$, et sa limite $y : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}^d$ est une solution de (2), donc de (3)

* Je vais construire une solution globale de (3)

→ On peut aussi construire une solution sur $[-T, 0]$ pour tout T tq $[-T, 0] \subset I$.

Par recollement, on sait donc construire une solution y sur $[T_*, T^*]$ pour T_*, T^* tels que $[T_*, T^*] \subset I$

On a $I = \bigcup_{T_*, T^*} [T_*, T^*]$ ($\forall t \in I, \exists T_*, T^*$ tq $T_* \leq t \leq T^*$ et $[T_*, T^*] \subset I$)

Soit $\hat{y} : I \rightarrow \mathbb{C}^d$ définie par $\hat{y}(t) = y^*(t)$ où $*$ est choisi de sorte que $t \in [T_*, T^*]$.

Cette fonction \hat{y} , n'est défini qu'à condition que le choix de $[T_*, T^*]$ contenant t ne change pas

la valeur de $y^*(t)$. Si c'est bien le cas, \hat{y} est continue sur I et vérifie (2) sur I . C'est donc une solution de (3).

* unicité locale: si y_1^* et y_2^* sont des solutions de (2) sur J avec $y_1^*(t_0) = y_2^*(t_0)$ en un $t_0 \in J$,

alors $y_1^* = y_2^*$. En effet,

$$y_1^*(t) = x_0 + \int_0^t A(s) y_1^*(s) + B(s) ds$$

$$y_2^*(t) = x_0 + \int_0^t A(s) y_2^*(s) + B(s) ds$$

$$\Rightarrow (y_1^* - y_2^*)(t) = \int_0^t A(s) (y_1^*(s) - y_2^*(s)) ds$$

$$\Rightarrow \|y_1^* - y_2^*(t)\| \leq \frac{\hat{A}^{n-1} \|y_1^*(t) - y_2^*(t)\|}{n!}$$

c'est absurde puisque $\frac{\hat{A}^{n-1}}{n!} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$

2^e preuve: Avec le thm du point fixe

$E = C^0([0, T], \mathbb{C}^d)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\infty}$. C'est un espace de Banach.

Soit $\phi : E \rightarrow E$ l'application définie par $\phi(y) = z$ ou $z(t) = y_0 + \int_0^t A(s)y(s) + B(s) ds$

→ ϕ admet une itérée contractante: il existe un $p \in \mathbb{N}$ tel que $\phi^p = \phi \circ \phi \circ \dots \circ \phi$ est contractante.

En effet, $\|\phi^p\| \leq \frac{\hat{A}^{p-1} M}{p!}$

$$< 1 \text{ pour } p \text{ assez grand}$$

→ Par le thm du point fixe,

ϕ^p admet un unique point fixe $\hat{y} \in E$

Rem: $\phi^{p+1}(\hat{y}) = \phi^p(\phi(\hat{y}))$

$$\phi(\phi^p(\hat{y})) = \phi(\hat{y})$$

Donc $\phi(\hat{y})$ est un point fixe de ϕ^p : c'est \hat{y} .

Ainsi, on a $\phi(\hat{y}) = \hat{y}$. Donc \hat{y} est solution de (3)

3) Structure de l'espace des solutions

PROP. Soit $Y' = F(t, Y)$ un système linéaire d'ordre 1 avec $F(t, Y) = A(t)Y + B(t)$

- i) l'ensemble S_0 des solutions du système homogène associé est un sev de $\dim n$ de $C^1(I)$
- ii) L'ensemble des solutions de $Y' = A(t)Y$

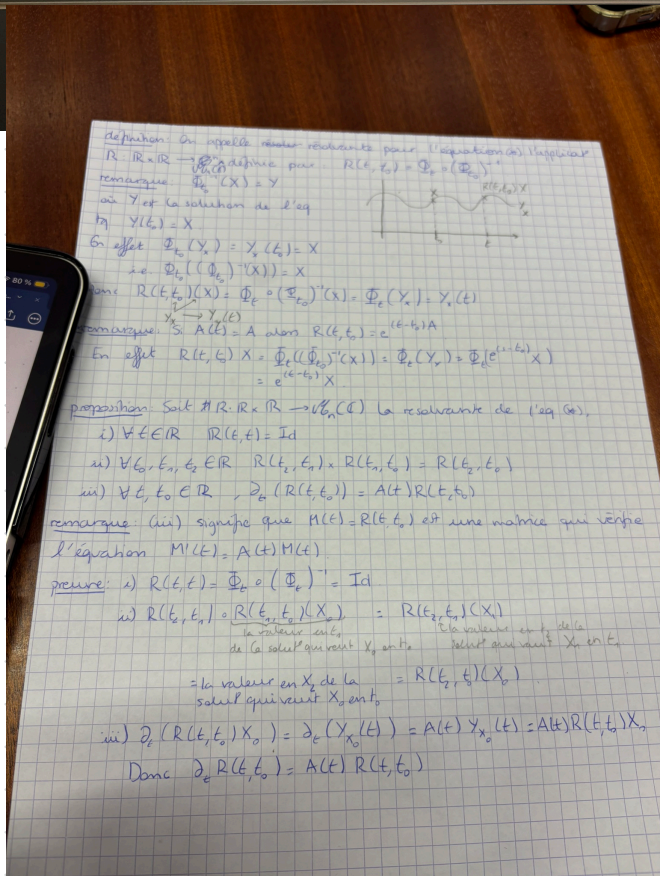
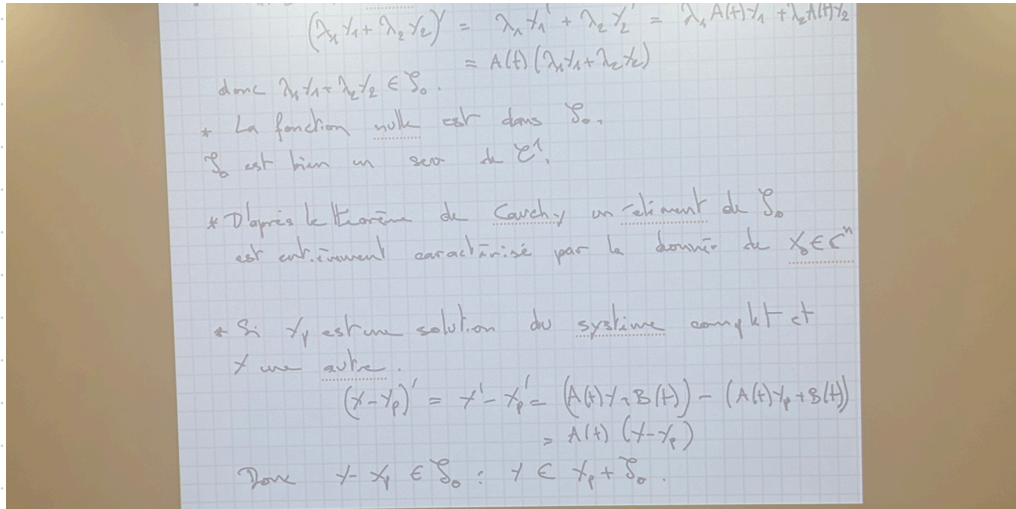
* Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, Y_1, Y_2 \in S_0$, alors $(\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2)' = \lambda_1 Y_1' + \lambda_2 Y_2' = \lambda_1 A(t)Y_1 + \lambda_2 A(t)Y_2 = A(t)(\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2)$

donc $\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 \in S_0$

* La fonction nulle est dans S_0

S_0 est bien sev de C^1

* D'après le thm de Cauchy, un elt de S_0 est entièrement caractérisé par la donnée de $Y_0 \in \mathbb{C}^n$



Chapitre 3: Méthodes numériques de résolution d'ED

(2 cours examen, une semaine vacances, une semaine annulée)

Pb: Il est impossible en général d'écrire "explicitement" les solutions d'ED (sauf linéaires à coeff constants)Idee: trouver un moyen d'obtenir des "solutions approchées"I. Méthode d'Euler explicite1) PrincipeOn cherche des solutions approchées du problème de Cauchy $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases}$ (P)On suppose $f: I \times U \rightarrow \mathbb{R}$ avec $f \in C^1$ sur $I \times U$, $I \subset \mathbb{R}$ intervalle et $U \subset \mathbb{R}$. Du coup (P) admet une unique solution maximale (J, y) .On sait que: $\forall t \in J, y'(t) = f(t, y(t))$

donc $\int_{t_0}^t y'(s) ds = \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$$

Problème 1: Comment calculer "numériquement" une intégrale.Idee: (Intégrale de Riemann): On découpe l'intervalle $[t_0, t]$ en N sous-intervalles de largeur

$$h = \frac{t - t_0}{N}. \text{ On pose } t_n = t_0 + nh = t_{n+1} - h$$

Ensuite on calcule $f(t_n, y(t_n))$ et on pense que $\int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \sim \sum_{n=0}^{N-1} h f(t_n, y(t_n))$ Problème 2: Pour calculer $\int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$, il faut connaître y . Mais y est ce que l'on veut calculer!Idee 2: On procède de proche en proche:→ on connaît $y(t_0) = x_0$. On pose $y_0 = y(t_0)$. Ensuite on pose:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \sim y_n + \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(s, y(s)) ds$$

$$= y_n + (t_{n+1} - t_n) f(t_n, y_n)$$

Attention: il y a deux sources d'erreurs① On a remplacé $f(s, y(s))$ par la constante $f(t_n, y_n)$ sur $[t_n, t_{n+1}]$ ② y_n n'est pas égale à $y(t_n)$

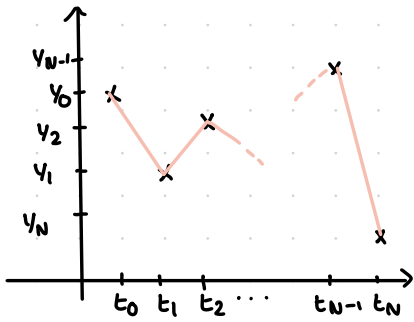
L'algorithme

$$\begin{cases} y_0 = y(t_0) = x_0 \\ y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \end{cases}$$

est appelé schéma d'Euler explicite.

Question: est-ce que ça marche?Ce schéma produit une suite finie de nombres (y_0, y_1, \dots, y_N) qu'on espère être des valeurs approchées respectives de $(y(t_0), y(t_1), \dots, y(t_N) = y(t))$

Cela correspond à la construction d'une fonction affine par morceaux $y_{\text{app}}^N : [t_0, t_N] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par.



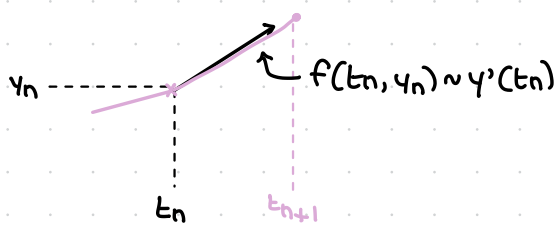
Question: est ce que y_{app} a quelque chose à voir avec la solution y ?

Figure: à gauche: $\begin{cases} y' = y & \text{solution } y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ y(0) = 1 & t \mapsto e^t \end{cases}$

à droite: $N=3$

ça a l'air de converger quand $N \rightarrow +\infty$

Rq: Dans la formule $y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n)$
le terme $f(t_n, y_n)$ ressemble à $y'(t_n) = f(t_n, y(t_n))$
Or $y'(t_n)$ est la pente de la tangente à C_f au point d'abscisse t_n .



Donc le schéma d'Euler est aussi une méthode géométrique de construction des y_n .

De manière générale, on appelle schéma numérique d'ordre 1 tout algorithme de la forme:

$$\begin{cases} y_0 = x_0 \\ y_{n+1} = y_n + h \Phi(t_n, y_n, t_{n+1}, y_{n+1}) \end{cases}$$

Par exemple, Euler explicite correspond à $\Phi(t_n, y_n, t_{n+1}, y_{n+1}) = f(t_n, y_n)$

→ à un pas: le calcul de y_{n+1} ne dépend que de (t_n, t_{n+1}, y_n)

→ explicite: quand Φ ne dépend pas de $(y_{n+1}, y_{n+2}, \dots)$
sinon, on parle de schéma implicite.

Par exemple: Euler implicite

$$y_{n+1} \sim y_n + h \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, y(s)) ds$$

\uparrow \uparrow
 $f(t_n, y(t_n))$ $f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))$

Ce choix conduit au schéma:

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_{n+1}, y_{n+1}) \quad (\text{Euler implicite})$$

\uparrow \uparrow \uparrow
 connu connu connu

Ici, le calcul de y_{n+1} demande la résolution de cette équation.

$$\Phi(t_n, y_n, t_{n+1}, y_{n+1}) = f(t_{n+1}, y_{n+1}).$$

II. Notion de convergence d'un schéma

1) Erreur de convergence

On suppose connus:

$$\rightarrow N \in \mathbb{N}$$

$$\rightarrow [t_0, t]$$

$$\rightarrow h^N = \frac{t - t_0}{N} = h$$

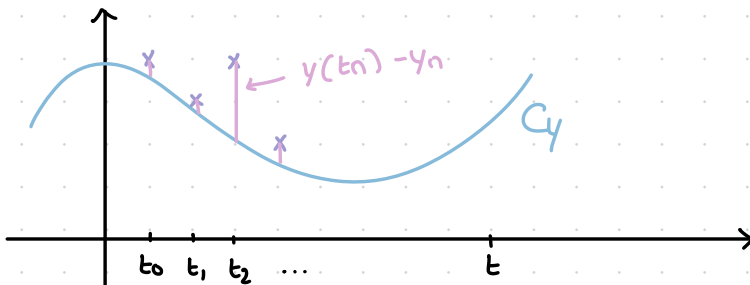
$$\rightarrow \phi(t_n, y_n)$$

On cherche une solution approchée du problème de Cauchy $\begin{cases} y' = f(t, y) & (P) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases}$

DEF: Soit (\mathcal{J}, y) la solution maximale de (P). On suppose que $[t_0, t] \subset \mathcal{J}$.

Soit (y_n) la suite de nombres obtenus par le schéma: $\begin{cases} y_0 = x_0 & (S) \\ y_{n+1} = y_n + h\phi(t_n, y_n) \end{cases}$

On appelle erreur de convergence de la méthode le nombre $e(h) = \max \{ |y_n - y(t_n)| ; n \in \{0, \dots, N\} \}$.



On dit que la méthode converge lorsque $e(h) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$ (i. e. quand $N \rightarrow +\infty$).

Attention! $e(h)$ est un objet théorique. Pour calculer $e(h)$, il faut connaître y , ce que l'on cherche à approcher.

2) Erreur de consistance

Peter Lax

Idee: mesurer l'erreur commise par le schéma lorsqu'on remplace $f(s, y(s))$ par $\phi(t_n, y_n)$

DEF: Soit (\mathcal{J}, y) la solution de (P). On appelle "erreur de consistance pour le schéma (S) à l'étape n relative à la solution y" le nombre:

$$E_n(h) = y(t_{n+1}) - y(t_n) - hf(t_n, y(t_n))$$

REM: $E_n(h)$ ne peut pas être calculée si on ne connaît pas y .

$E_n(h)$ ne dépend pas de y_n .

REM: $E_n(h) = y(t_{n+1}) - y(t_n) - hf(t_n, y(t_n))$ (Euler)

$$\begin{aligned} &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(s) ds - (t_{n+1} - t_n) f(t_n, y(t_n)) \\ &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, y(s)) ds - \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t_n, y(t_n)) ds \\ &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} [f(s, y(s)) - f(t_n, y(t_n))] ds \end{aligned}$$

$\uparrow \phi$

erreur de consistance \sim méthode de calcul approchée choisie pour $\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, y(s)) ds$

DEF: On appelle erreur de consistance globale la quantité $\mathcal{E}(h) = \sum_{n=0}^{N-1} |\mathcal{E}_n(h)|$

PROP: Pour la méthode d'Euler explicite, on a $\mathcal{E}(h) = O(h)$ quand $h \rightarrow 0$ pour $f \in C^1$

DEF: Si pour le schéma (S) on trouve $\mathcal{E}(h) = O(h^p)$

On dit que (S) est une méthode d'ordre p .

Par exemple: Euler explicite est d'ordre 1

Preuve: On a vu que $\mathcal{E}_n(h) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, y(s)) - f(t_n, y(t_n)) ds$
 $= \int_{t_n}^{t_{n+1}} (y'(s) - y'(t_n)) ds$

Or puisque $f \in C^1$ et $y(t) = f(t, y(t))$, la fonction y est automatiquement C^2 .

Je peux donc appliquer le TAF à y' sur $[t_n, t_{n+1}]$: $|y'(t) - y'(t_n)| \leq |t - t_n| \sup_{t \in [t_n, t_{n+1}]} |y''(t)|$

Donc $|\mathcal{E}_n(h)| \leq \int_{t_n}^{t_{n+1}} |y'(s) - y'(t_n)| ds$
 $\leq |t_{n+1} - t_n|^2 \sup_{[t_n, t_{n+1}]} |y''(s)|$
 $\leq Ch^2$ avec $C = \sup_{[t_0, t]} |y''(s)|$

Enfin $\mathcal{E}(h) = \sum_{n=0}^{N-1} |\mathcal{E}_n(h)|$
 $\leq Ch^2 \sum_{n=0}^{N-1} 1 \leq CNh^2$
 $\leq C \frac{(t-t_0)}{h} h^2 \leq Mh$ où $M = C|t - t_0|$

3) Stabilité:

QU: Comment se comporte la suite (y_n) produite par le schéma (S) lorsqu'on modifie (légèrement) la donnée y_n pour calculer y_{n+1} ?

Essentiellement, on veut voir quel erreur on commet quand on remplace $y(t_n)$ par y_n dans $y_{n+1} = y_n + f(t_n, y_n)$

Pour comprendre le phénomène, on introduit:

$[y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \quad \leftarrow \text{schéma d'Euler}$
 $[z_{n+1} = (z_n + \delta_n) + hf(t, z_n) \quad \leftarrow \text{schéma d'Euler perturbé}$

DEF: s'il existe une constante $c > 0$ et un réel $h_0 > 0$ tels que $\forall y_0, z_0, \forall (\delta_n)$ on a:

$|z_n - y_n| \leq c(|z_0 - y_0| + \sum_{k=0}^{n-1} |\delta_k|)$

On dit que le schéma est stable.

PROP: si (S) est stable et consistant d'ordre p , alors $e(h) = O(h^p)$

"consistance + stabilité \Rightarrow convergence" (Lax)

PROP: Si (S) est stable et consistant d'ordre p , alors $e(h) = \mathcal{O}(h^p)$

"consistance + stabilité" \Rightarrow "convergence" (Lax)

Sous l'hypothèse suivante:

(H) La fonction $f: I \times U \rightarrow \mathbb{R}^r$ est lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable uniformément par rapport à la première, c.à.d.:

$\exists K > 0$ telle que

$$\forall x_1, x_2 \in U, \forall t \in I \quad \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq K \|x_1 - x_2\|$$

\uparrow indépendant de t

Rq: si f est $C^1(I \times U)$, alors pour tout compact $K \subset I$, f est $L^1 U^1$ sur $K \times U$

preuve: Soit $I + N \in \mathbb{N}^*$ fixé le nombre de termes de la suite.

Soit aussi $n \leq N-1$

$$|z_{n+1} - y_{n+1}| = |[z_n + \delta_n + hf(t_n, z_n)] - [y_n + hf(t_n, y_n)]|$$

$$\leq |z_n - y_n| + |\delta_n| + |h(f(t_n, z_n) - f(t_n, y_n))|$$

$$\leq |z_n - y_n| + |\delta_n| + Kh|z_n - y_n|$$

$$\leq (1+hK)|z_n - y_n| + |\delta_n|$$

Par récurrence, on obtient:

$$\text{pour tout } n \leq N, \quad |z_n - y_n| \leq (1+hK)^n |z_0 - y_0| + \sum_{m=0}^{n-1} (1+hK)^{n-m} |\delta_m|$$

$$\text{or } (1+hK)^p = e^{p \ln(1+hK)} \leq e^{phK}$$

$$\text{On obtient donc: } |z_n - y_n| \leq e^{NKe} \left(|z_0 - y_0| + \sum_{m=0}^n |\delta_m| \right)$$

$$\leq e^{K(t-t_0)} \left(|z_0 - y_0| + \sum_{m=0}^n |\delta_m| \right)$$

\uparrow
 C

Cela prouve la stabilité du schéma d'Euler sous l'hypothèse (H)

Remarque: La constante C est d'autant plus mauvaise que l'intervalle $[t_0, t]$ sur lequel on veut approcher la solution est grand.

* Preuve du théorème de Lax:

On suppose que l'hypothèse (H) est satisfaite.

$$\text{On a } \varepsilon_n(h) = y(t_{n+1}) - y(t_n) - hf(t_n, y(t_n))$$

Je définis la suite z_n comme ci-dessus en prenant $\delta_n = \varepsilon_n$, autrement dit:

$$z_{n+1} = z_n + \varepsilon_n + hf(t_n, z_n), \quad z_0 = y_0$$

$$\text{On vient de voir que } |z_n - y_n| \leq \underbrace{C}_{=0} \underbrace{\left(|z_0 - y_0| + \sum_{m=0}^{n-1} |\varepsilon_m| \right)}_{\leq cte \cdot h}$$

$$\leq \tilde{C} h$$

$$\text{car } \varepsilon(h) = \sum |\varepsilon_m(h)| = \mathcal{O}(h)$$

$$\text{Ainsi, } e(h) = \max_m |y_m - y(t_m)| = \mathcal{O}(h)$$

III. Limitations

On se concentre sur la méthode d'Euler explicite.

* **Attention:** méthode d'ordre 1: il faut multiplier le nombre de pas N par 10 pour améliorer la précision d'un facteur $1/10$.

* **Instabilité pour les temps grands.**

Sur un exemple: $\begin{cases} y' = -ay & \text{avec } a, x_0 > 0 \\ y(0) = x_0 \end{cases}$

La solution est $y(t) = x_0 e^{-at}$: $y(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$ et $y(t) > 0$.

→ Le schéma d'Euler pour ce pb s'écrit:

$$\begin{cases} y_0 = x_0 \\ y_{n+1} = y_n - ah y_n = (1-ah)y_n \end{cases}$$

On trouve $y_n = (1-ah)^n x_0$. Pour $ah > 2$, $|1-ah| > 1$

Donc $|y_n| \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$ (si $h > 1/a$, < 0 pour n impair, > 0 pour n pair or on approxime y tout le temps > 0 .)

L'approximation de $y(t_n)$ par y_n est forcément très mauvaise pour n grand.

Pour qu'il y ait une chance que ça marche, il faut prendre h tel que $h \leq \frac{2}{a}$. Pour a grand, cela veut dire un N grand.

* **Exemple 2:** $\begin{cases} y' = -3y + 1 \\ y(0) = x_0 \end{cases}$

La solution est $y(t) = \frac{1}{3} + (x_0 - \frac{1}{3})e^{-3t}$

→ En particulier, pour $x_0 = 1/3$, la solution est la fonction $y_0: t \mapsto 1/3$, constante.

→ Le schéma d'Euler s'écrit: $\begin{cases} y_0 = x_0 = 1/3 \\ y_{n+1} = y_n + h(-3y_n) \end{cases} \rightarrow y_{n+1} = y_n$

Maissi $x_0 = 1/3 + \delta$ (erreur de concature)

On trouve

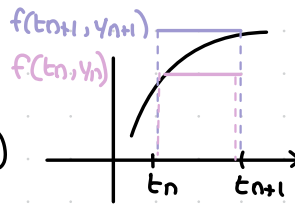
$$y_n = 4^n \delta + 1/3$$

erreur exponentiellement quand n grand

Donc $|y_n - y_n^{\text{sol}}| = 4^n \delta \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$

2) Essayons Euler implicite

Le schéma d'Euler implicite est $\begin{cases} y_0 = x_0 \\ y_{n+1} = y_n + h f(t_{n+1}, y_{n+1}) \end{cases}$ (*)



On rappelle que le calcul de y_{n+1} nécessite la résolution d'une équation (numérique). (ex: méthode de Newton)

(*) **Exemple:** $y' = a(t)y + b(t)$,

(*) devient $y_{n+1} = y_n + h(a(t_{n+1})y_{n+1} + b(t_{n+1}))$

$$\Leftrightarrow y_{n+1}(1 - ha(t_{n+1})) = y_n + hb(t_{n+1})$$

$$\Leftrightarrow y_{n+1} = \frac{y_n + hb(t_{n+1})}{1 - ha(t_{n+1})} \quad (a(t_{n+1}) \neq 1/h)$$

En particulier, pour l'équation $y' = -ay$, on obtient :

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{1+ha}$$

Par récurrence, on obtient $y_n = \frac{1}{(1+ah)^n} x_0$

Comme $1+ah > 1$, on voit que $y_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Dans ce cas, la méthode d'Euler implicite est 'bien meilleure' que la méthode d'Euler explicite.

Argument contre Euler implicite: il faut aussi programmer une méthode (rapide!) de résolution numérique, par exemple, la méthode de Newton.

CCL: EI et EE sont relativement faciles à programmer, mais un peu lente. En tous cas, aucune des deux ne peut remplacer totalement l'autre.

IV. Méthodes de Runge-Kutta explicites

On cherche une solution approchée pour le pb de Cauchy:
$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases}$$

La solution de ce problème est aussi solution de l'équation:

$$\forall t \in [t_0, T], y(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$$

On veut calculer de manière approchée l'intégrale (sans oublier que dans cette intégrale figure l'inconnue y !)

Idée: Pour calculer l'intégrale $\int_0^1 g(u) du$, on essaye une formule (de quadrature) de la forme :

$$\int_0^1 g(u) du \sim \sum_{j=1}^k b_j g(c_j)$$

avec b_j des coefficients, et c_j des points de $[0, 1]$.

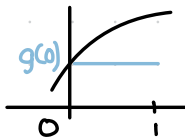
Il y a 3 paramètres à fixer :

- le nb de points
- les b_j = les poids
- les c_j = les points d'interpolation

Attention: tous les choix ne sont pas judicieux.

Ex: $k=1, c_1=0, b_1=1$

$$\int_0^1 g(u) du \sim 1 \cdot g(0)$$



Ce correspond à la méthode des rectangles à gauche \rightarrow EE

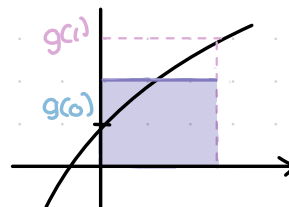
$$k=1, c_1=1, b_1=1 \int_0^1 g(u) du \sim 1 \cdot g(1)$$

méthode des rectangles à droite \rightarrow EI

1) Méthode de Heun

$k=2: c_1=0, c_2=1, b_1=b_2=1/2$

$$\int_0^1 g(u) du \sim b_1 g(c_1) + b_2 g(c_2) = \frac{1}{2}(g(0) + g(1))$$



Le schéma correspondant s'écrit:
$$\begin{cases} y_0 = x_0 \\ y_{n+1} = y_n + h \phi(t_n, y_n, t_{n+1}, y_{n+1}) \end{cases}$$

où $\phi(t_n, y_n, t_{n+1}, y_{n+1}) = \frac{f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})}{2}$

Précisément, $y_{n+1} = y_n + \frac{hf(t_n, y_n)}{2} + \frac{hf(t_{n+1}, y_{n+1})}{2} \quad \left(\frac{\epsilon\epsilon + \epsilon I}{2} \right)$

C'est un schéma implicite, qui porte le nom **Crank-Nicholson**.

On peut modifier ce schéma pour le rendre explicite.

On remplace le calcul direct de y_{n+1} par la formule: $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1}))$

remplace par ce que l'on obtient avec la méthode d'EE:
 $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$

On obtient le schéma de **Heun**:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (f(t_n, y_n) + f(t_n + h, y_n + hf(t_n, y_n)))$$

Ce schéma est explicite.

Voici une manière de l'implémenter:

$$\begin{cases} p_1 = f(t_n, y_n) \\ p_2 = f(t_n + h, y_n + hp_1) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(p_1 + p_2) \end{cases}$$

PROP: Si f est C^2 et $L2U1$, alors le schéma de Heun est convergent d'ordre 2!

preuve: On montre d'abord que ce schéma est stable.

Soit (y_n) et (z_n) les suites définies par:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h\phi(t_n, y_n), \text{ où } \phi(t, x) = \frac{1}{2}f(t, x) + f(t+h, x + hf(t, x)) \\ z_{n+1} &= z_n + \delta_n + h\phi(t_n, z_n) \end{aligned}$$

On a: $|y_{n+1} - z_{n+1}| \leq |y_n - z_n| + |\delta_n| + h|\phi(t_n, y_n) - \phi(t_n, z_n)|$ (*)

Mq ϕ est $L2U1$: ($t_1 = t_2$)

$$|\phi(t_1, x_1) - \phi(t_2, x_2)| \leq \frac{1}{2} |f(t_1, x_1) + f(t_1 + h, x_1 + hf(t_1, x_1)) - f(t_2, x_2) - f(t_2 + h, x_2 + hf(t_2, x_2))|$$

$$\leq \frac{1}{2} |f(t_1, x_1) - f(t_2, x_2)| + \frac{1}{2} |f(t_1 + h, x_1 + hf(t_1, x_1)) - f(t_2 + h, x_2 + hf(t_2, x_2))|$$

f $L2U1$: $\leq \frac{1}{2} K|x_1 - x_2| + \frac{1}{2} K|(x_1 + hf(t_1, x_1)) - (x_2 + hf(t_2, x_2))|$

$$\leq \frac{1}{2} K|x_1 - x_2| + \frac{1}{2} K(|x_1 - x_2| + |h| |f(t_1, x_1) - f(t_2, x_2)|)$$

$$\leq \frac{1}{2} K|x_1 - x_2| + \frac{1}{2} K|x_1 - x_2| + \frac{1}{2} hK^2|x_1 - x_2|$$

$$\leq (K + \frac{1}{2} hK^2) |x_1 - x_2| \leq \tilde{K} |x_1 - x_2|$$

De ce fait, (*) $\Rightarrow |y_{n+1} - z_{n+1}| \leq |y_n - z_n| + \delta_n + h\tilde{K} |y_n - z_n|$

$$\Rightarrow |y_{n+1} - z_{n+1}| \leq (1 + h\tilde{K}) |y_n - z_n| + |\delta_n|$$

Par récurrence on obtient: $\forall n \in \mathbb{N}^*, |y_n - z_n| \leq e^{n\tilde{K}(t-t_0)} (|z_0 - y_0| + \sum_{j=0}^{n-1} |\delta_j|)$

c.à.d. que le schéma de Heun est stable

2) Cas général

Idee: On part de $y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, y(s)) ds$

On veut calculer de manière approchée $\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, y(s)) ds = I_n$

On note que, en posant $s = u(t_{n+1} - t_n) + t_n$

$$I_n = \int_0^1 f(t_n + u(t_{n+1} - t_n), y(t_n + u(t_{n+1} - t_n))) (t_{n+1} - t_n) du$$

$$= h \int_0^1 g(u) du$$

On a vu que l'on pouvait essayer de donner une valeur approchée des $\int_0^1 g(u) du \approx \sum_{i=1}^q b_i g(c_i)$
 avec q : nombre d'étages de la méthode
 b_i : poids de la méthode
 c_i : points

Une fois $q, (b_i), (c_i)$ fixés on obtient le schéma:

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^q b_i g(c_i) = y_n + h \sum_{i=1}^q b_i f(t_n + c_i h, \underbrace{y(t_n + c_i h)}_{\text{inconnu}})$$

or $y(t_n + c_i h) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_n + c_i h} f(s, y(s)) ds = y(t_n) + h \int_0^{c_i} f(t_n + hu, y(t_n + hu)) du$

On pose $y_{n,i+1} = y_{n,i} + h \sum_{j=1}^q a_{i+1,j} f(t_n + hc_j, y_{n,j})$

Cela conduit à l'algorithme suivant:

$y_0 = x_0, t_0 = t_0$
 Pour $n \in \{0, \dots, N-1\}$
 $t_{n+1} = t_n + h$
 $t_{n,1} = t_n$
 $p_{n,1} = f(t_{n,1}, y_n)$
 Pour $i \in \{1, \dots, q-1\}$
 $t_{n,i+1} = t_n + hc_{i+1}$
 $p_{n,i+1} = f(t_{n,i+1}, y_n) + h \sum_{j=1}^q a_{i+1,j} p_{n,j}$
 $y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^q b_i p_{n,i}$

Exemple la méthode de Heun

$y_0 = x_0, t_0 = t_0$
 $p_0 = f(t_n, y_n) \leftarrow N=2$
 $p_1 = f(t_n + h, y_n + hp_0)$
 $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(p_0, p_1)$ $N=2 : 2 \text{ étages}$
 $b_0 = 1/2 \quad b_1 = 1/2$

Exemple: la méthode d'EE

$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$

Chaque méthode Runge-Kutta peut être représentée par son tableau de Butcher:

$c_1 = 0$	$a_{2,1}$								
c_2	$a_{3,1}$	$a_{3,2}$							
c_3									
c_q	$a_{q,1}$	$a_{q,2}$					$a_{q,q-1}$	$a_{q,q}$	
	b_1	b_2	b_3				b_{q-1}	b_q	

$q \geq 2$

Cas Euler explicite:

$c_1 = 0$	
$c_2 = 1$	$a_{2,1} = 1$
	$b_1 = 1$

Cas de Heun:

$c_1 = 0$	
$c_2 = 1$	$a_{1,0} = 1$
	$b_1 = 1/2, b_2 = 1/2$

DEF: on appelle méthode Runge-Kutta d'ordre 4 le schéma qui correspond au tableau de Butcher

$c_0 = 0$				
$c_1 = 1/2$	$1/2$			
$c_2 = 1/2$		$1/2$		
$c_3 = 1$			1	
	$b_0 = 1/6$	$b_1 = 1/3$	$b_2 = 1/3$	$b_3 = 1/6$

$q = 4$ étages $\sum b_j = 1$

Pour $i = 0 \dots N-2$

$$p_1 = f(t[i], y[i])$$

$$p_2 = f(t[i] + h/2, y[i] + \frac{h}{2} p_1)$$

$$p_3 = f(t[i] + h/2, y[i] + \frac{h}{2} p_2)$$

$$p_4 = f(t[i] + h, y[i] + h p_3)$$

$$y[i+1] = y[i] + h \left(\frac{1}{2} p_1 + \frac{1}{3} p_2 + \frac{1}{3} p_3 + \frac{1}{6} p_4 \right)$$

PROP: Soit f une fonction C^1 . On considère l'équation diff $y' = f(t, y)$
 Le schéma à un pas explicite $y_{n+1} = y_n + h \phi(t_n, y_n, h)$ est consistant ssi $\phi(t, x, 0) = f(t, x)$

PREUVE: $E_n(h) = y(t_{n+1}) - y(t_n) - h \phi(t_n, y(t_n), h)$, où y est la solution du pb de Cauchy
 En particulier y est C^2 . On peut écrire $y(t_{n+1}) = y(t_n) + h f(t_n, y(t_n)) + o(h)$
 Donc $E_n(h) = h f(t_n, y(t_n)) + o(h) - h \phi(t_n, y_n, h)$
 Ainsi $E_n(h) = o(h)$ ssi $f(t_n, y(t_n)) = \phi(t_n, y_n, 0)$

Conséquence par Runge-Kutta:
 On a $\phi(t_n, y_n, h) = \sum_{i=1}^q b_i p_{n,i}(h)$ et pour $h=0$ $p_{n,i}(h) = f(t_n, y_n)$

Donc RK est stable ssi $f(t, x) = \phi(t, x, 0) = \sum_{i=1}^q b_i f(t, x)$
 $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^q b_i = 1$

Remarque sur l'ordre des méthodes de RK

RK(q) \rightarrow consistant d'ordre q pour $q \leq 4$
 Mais, * la méthode de Runge-Kutta d'ordre 5 a au moins 6 étages
 * _____ a au moins 21 étages
 Attention l'ordre n'est pas égal au nombre d'étages (sauf 1, 2, 3, 4)

Ch 4 x

Ch 5) Comportement en temps long des solutions

On considère le problème de Cauchy $\begin{cases} Y' = F(Y) \\ Y(0) = X_0 \end{cases}$; où $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est C^1 ne dépend pas du temps.

On suppose que la solution maximale de ce problème est (\mathbb{R}, Y) : Y est défini pour tout $t \geq 0$

Question: Que peut-on dire de $Y(t)$ quand $t \rightarrow +\infty$?

Exemple: Système prédateur - proies (Lotka - Volterra)

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 - by_1 y_2 \\ y_2' = -cy_1 + dy_1 y_2 \end{cases} \quad \text{où } a, b, c, d > 0 \quad (P)$$

← sauridine
+ requin

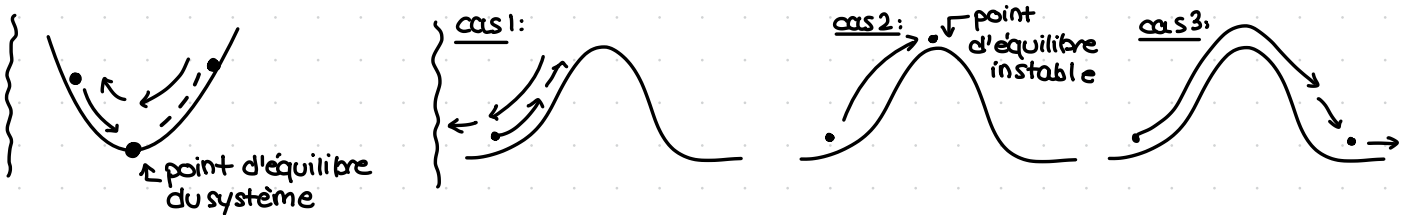
$y_1(t)$ = nombre de proies à l'instant t

$y_2(t)$ = nombre de prédateur à l'instant t

Un cas simple: si X_0 est un zéro de F :

Dans ce cas, la solution de (P) est $(\mathbb{R}, t \rightarrow X_0)$

DEF: On dit que X_0 est un point d'équilibre pour l'équation $Y' = F(Y)$, lorsque $F(X_0) = 0$



I. Cas particulier: les systèmes linéaires 2x2:

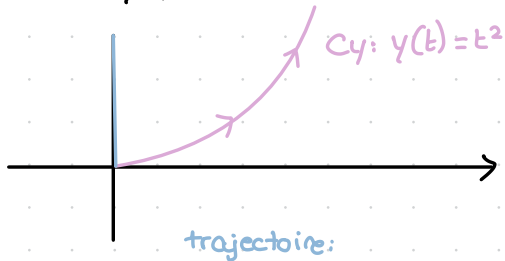
On considère : $Y' = AY$, où $A \in M_2(\mathbb{R})$ à coefficients constants.

DEF: On appelle orbite du système $Y' = F(Y)$ toute courbe θ définie par $\theta = \{ Y(t); t \in \mathbb{R}^+ \} \subset \mathbb{R}^n$, où Y sol.

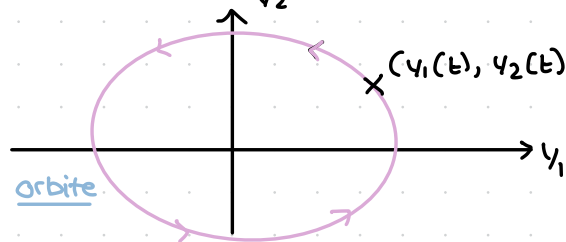
Ne pas confondre : - trajectoire $\{ (t, Y(t)), t \in \mathbb{R}^+ \} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

- orbite $\{ Y(t), t \in \mathbb{R}^+ \} \subset \mathbb{R}^n$

$t \mapsto y(t) = t^2$



$y: t \mapsto (\cos t, \sin t)$



PROP: Pour un système autonome $Y' = F(Y)$ (i.e. F ne prend pas de t):

i) si Y est une solution alors $\tilde{Y}: t \mapsto Y(t-T)$ est aussi une solution pour tout T

ii) si Y_1 et Y_2 sont deux solutions distinctes, leurs orbites O_1 et O_2 ne se croisent jamais

un peu faux

PREUVE

(de i). Soit (\mathbb{R}, γ) une solution et $T \in \mathbb{R}$. Soit $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ la fonction définie par $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t-T)$

On a : $\tilde{\gamma}'(t) = \partial_t(\gamma(t-T)) = \gamma'(t-T) = \gamma'(t-T) = F(\gamma(t-T)) = F(\tilde{\gamma}(t))$

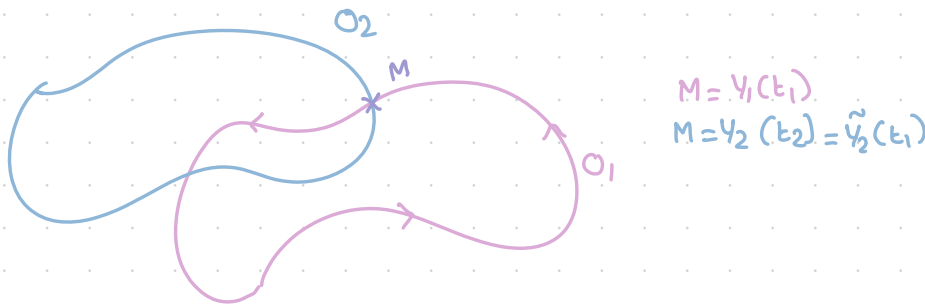
(de ii) : Si γ_1 et γ_2 deux solutions. On suppose qu'il existe $M \in O_1 \cap O_2$. Il existe t_1 tq $\gamma_1(t_1) = M$, et il existe t_2 tel que $\gamma_2(t_2) = M$. Je note $T = t_1 - t_2$, et $\tilde{\gamma}_2$ la fonction définie par $\tilde{\gamma}_2(t) = \gamma_2(t-T)$

→ γ_1 et $\tilde{\gamma}_2$ sont des solutions de l'équation $\gamma' = F(\gamma)$ grâce à i). De plus, $\gamma_1(t_1) = M$, $\tilde{\gamma}_2(t_1) = \gamma_2(t_1-T) = \gamma_2(t_1 - (t_1 - t_2)) = \gamma_2(t_2) = M$

Donc γ_1 et $\tilde{\gamma}_2$ sont solutions du même problème de Cauchy : $\begin{cases} \gamma' = F(\gamma) \\ \gamma(t_1) = M \end{cases}$

Par l'unicité de Cauchy, $\gamma_1 = \tilde{\gamma}_2$. Donc $O_1 = O_2$

ii) Si O_1 et O_2 ont un point commun, elles sont confondues



1) Cas dégénéré : A admet au moins une valeur propre nulle

a) A diagonalisable : quitte à changer de base, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$: $\begin{cases} y_1' = 0 \\ y_2' = \lambda y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = c_1 \\ y_2 = c_2 e^{\lambda t} \end{cases}$

b) A n'est pas diagonalisable : alors 0 est vp double et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
 $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = c_2 t + c_1 \\ y_2 = c_2 \end{cases}$

2) A inversible

a) A a 2 vp réelles distinctes

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1 \\ y_2' = \lambda_2 y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ y_2 = c_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases} \rightarrow \boxed{y_2 = c_2 y_1^{\lambda_2/\lambda_1}}$$

orbites? (voir portraits phase 2x2 notebook)

si $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ noeud stable

si $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ noeud instable

si $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ point selle

si $\lambda_1, \lambda_2 > 0, \lambda_2/\lambda_1 > 1$ noeud instable

si $\lambda_1, \lambda_2 < 0, \lambda_2/\lambda_1 < 1$ noeud stable

si $\lambda_1 < 0 < \lambda_2, \lambda_2/\lambda_1 < 0$ selle

b) A n'est pas diagonalisable : une valeur propre double $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$... noeuds impropres

c) A a deux racines complexes distinctes

$\lambda_1 = re^{i\theta}$ $\lambda_2 = re^{-i\theta}$ parce que A est réelle.

$$\begin{cases} v_1(t) = a(t) \cos \delta(t) \\ v_2(t) = a(t) \sin \delta(t) \end{cases}$$

On trouve $\begin{cases} a'(t) = a(t) \cos \theta \delta'(t) \\ \delta'(t) = -a(t) \sin \theta(t) \end{cases}$

et $a(t) = r e^{\cos \theta t}$ $\delta(t) = \theta - r \sin(\theta) t$

Dans tous les cas $(0,0)$ est un point d'équilibre du système : $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ($F(x_0) = 0$ pour $x_0 = 0$)

II. Cas général

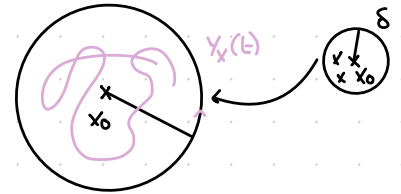
1) **DEF:** Soit x_0 un point d'équilibre pour $y' = F(y)$

On dit que x_0 est stable (au sens de Lyapounov) lorsque

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tq si $\|x - x_0\| < \delta$ alors $\forall t > 0, \|y_x(t) - y_{x_0}(t)\| < \varepsilon$

où $y_x(t)$ (resp $y_{x_0}(t)$) est la solution du problème de Cauchy:

$$\begin{cases} y' = F(y) \\ y(0) = x \end{cases} \text{ resp. } \begin{cases} y' = F(y) \\ y(0) = x_0 \end{cases} \text{ (i.e. } y_{x_0}(t) = x_0)$$



Qu: Pour les systèmes 2×2 , quand le point $(0,0)$ est-il un point d'équilibre stable? (voir)

DEF: Soit x_0 un point d'équilibre pour $y' = F(y)$. On dit que x_0 est asymptotiquement stable lorsque:

i) x_0 est stable

ii) Il existe $\delta > 0$ tq $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_0$ (Lyapounov)

2) Fonction de Lyapounov

DEF: Soit x_0 un point d'équilibre pour $y' = F(y)$. Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ un voisinage de x_0 , et $L: V \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction C^1 . On dit que L est une fonction de Lyapounov sur U pour $y' = F(y)$ en x_0 lorsque:

- i) $L(x_0) = 0$
- ii) $\forall x \in V \setminus \{x_0\}, L(x) > 0$
- iii) $\forall x \in V, \nabla L(x) \cdot F(x) \leq 0$

si iii) est $\forall x \in V, \nabla L(x) \cdot F(x) < 0$ on dit que L est une fonction de Lyapounov stricte.

PROP: Soit x_0 un point d'équilibre pour $y' = F(y)$. Soit $L: V \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction C^1 .

L est une fonction de Lyapounov sur V ssi pour toute solution (\mathbb{R}, y) de l'équation, la fonction $t \mapsto L(y(t))$ est décroissante

Preuve:

* Supposons que $L: V \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction de Lyapounov. On a

$$\partial_t (L(y(t))) = \nabla L(y(t)) \cdot y'(t) = \nabla L(y(t)) \cdot F(y(t)) \leq 0$$

Donc $t \mapsto L(y(t))$ est bien décroissante.

* Réciproquement. Je suppose que $L(y(t))$ est décroissante.

On a donc $\partial_t (L(y(t))) \leq 0$ donc pour tout t, $\nabla L(y(t)) \cdot F(y(t)) \leq 0$ (*)

On peut faire ce raisonnement pour n'importe quelle solution $y' = F(y)$

Pour X donnée, je note y_x les solutions de $\begin{cases} y' = F(y) \\ y(0) = X \end{cases}$

Par (*) en $t=0$, j'obtiens $\nabla L(X) \cdot F(X) \leq 0$

PROP. [1^{er} thm de Lyapounov]

Si il existe une fonction de Lyapounov pour $y' = F(y)$ en X_0 alors X_0 est point d'équilibre stable

preuve admise

Retour au système prédateur-proie

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 - by_1y_2 \\ y_2' = -cy_2 + dy_1y_2 \end{cases} \Leftrightarrow y' = F(y) \quad \text{où } F(x_1, x_2) = (ax_1 - bx_1x_2, -cx_2 + dx_1x_2)$$

→ Points d'équilibre : $F(0, 0) = (0, 0)$
 $F\left(\frac{d}{c}, \frac{b}{a}\right) = \left(\frac{d}{c}, \frac{b}{a}\right)$

$(0, 0)$ est instable

$\left(\frac{d}{c}, \frac{b}{a}\right)$ est stable: il existe une fonction de Lyapounov $L(x_1, x_2) = x_1 - \log \frac{x_1}{a} + x_2 - \log \frac{x_2}{b}$

