

Exos 1, 3, 5, 10

Rappels:

forme sesquilinéaire $b: \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{R} \quad b(x, \alpha y) = \alpha b(x, y)$ forme quadratique: $q: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{R} \quad b(\alpha x, y) = \bar{\alpha} b(x, y)$
 $q(x) = b(x, x)$

$$x^T A x > 0 \text{ et } \forall x \quad x^T A x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

* matrice définie positive: toutes les valeurs propres > 0

Exo1:

Mq $q(x, y) = x^2 + 0.1xy + 2y^2$ définie positive + matrice associée (majorer $|xy|$ / compléter le carré diagonaliser la matrice) 2) Que dire de $q(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$

1) méthode 1:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$|xy| \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$$

$$\begin{aligned} q(x, y) &\geq x^2 - 0.1|xy| + 2y^2 \\ &\geq x^2 - 0.1 \frac{(x^2 + y^2)}{2} + 2y^2 \\ &\geq 0.95x^2 + 1.95y^2 \text{ DF} \end{aligned}$$

méthode 2: [compléter le carré]

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned} q(x, y) &= (x + 0.05y)^2 + 2y^2 - 0.0025y^2 \\ &= (x + 0.05y)^2 + 1.9975y^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q(x, y) = 0 &\Leftrightarrow x + 0.05y = 0 \\ &\text{et } y^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow y = 0 \text{ et } x = 0 \end{aligned}$$

méthode 3 [matrice associée]

$$\text{Soit } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

On pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, la matrice associée à q

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ax + by \\ bx + cy \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= ax^2 + bxy + bxy + cy^2 \\ &= ax^2 + 2bxy + cy^2 \end{aligned}$$

Donc en identifiant: $a = 1, 2b = 0.1, c = 2$

$$\Rightarrow b = 0.05$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.05 \\ 0.05 & 2 \end{pmatrix}, \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -0.05 \\ -0.05 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda - 2) - 0.0025$$

$$= \lambda^2 - 3\lambda + 1.9975$$

$$\sim \Delta = 9 - 4 \times 1.9975 > 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{\Delta}}{2} > 0 \quad \text{Donc } A \text{ symétrique définie positive}$$

Critère de Sylvester: les n mineurs principaux sont $> 0 \Leftrightarrow A$ SDF

$$\sim \Delta_1 = 1 > 0 \quad \Delta_2 = \det(A) = 1.9975 > 0$$

$$2) \quad q_2(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 \geq 0$$

$$q_2(x, y) = 0 \Leftrightarrow x + y = 0 \Leftrightarrow x = -y \Rightarrow \text{pas définie positive}$$

Exo 3:

Si A matrice $N \times N$, mq la sous-matrice des $n \leq N$ lignes est colonnes peut être obtenue par X^*AX

(calcul brutal avec la formule de multiplication des matrices / $X = (v_1, \dots, v_n) / (X^*AX)_{ij} = \langle e_i, (X^*AX)e_j \rangle = \langle X e_i, A X e_j \rangle$)

Méthode 1 [formule de multiplication]

$$(X^*AX)_{ij} = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n x_{ik}^* a_{k\ell} x_{\ell j}$$

On veut $(X^*AX)_{ij} = A_{ij} \quad \forall i, j \leq n \quad \leadsto \quad \forall k, \ell > n, x_{k\ell} = 0$

$$(X^*AX)_{ij} = \sum_{k, \ell > 0} \delta_{ki} a_{k\ell} \delta_{\ell j} \quad [\text{avec } \delta_{ki} = 1 \text{ si } k=i, 0 \text{ sinon}]$$

$$\Rightarrow A_{ij} = x_{i,i}^* a_{ij} x_{jj} = \delta_{ii} a_{ij} \delta_{jj}$$

$$X = \begin{pmatrix} I_n \\ 0_{N-n} \end{pmatrix} \in M_{N,n}(\mathbb{R})$$

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad AX = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{pmatrix}$$

$\downarrow X^* \quad \downarrow A \quad \downarrow X$
 $(n \times n) (N \times N) (N \times n)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$$

Méthode 2 [$X = (v_1, \dots, v_n)$]

$$X = (v_1, \dots, v_n) \quad v_i \in \mathbb{R}^N$$

$$(X^*AX)_{ij} = \langle v_i, A v_j \rangle = A_{ij} = \langle e_i, A e_j \rangle$$

i.e. on veut que $\forall A, \forall i, j \leq n \quad \langle v_i, A v_j \rangle = \langle e_i, A e_j \rangle$

$$\forall i, j \leq n, \langle v_i, I_N v_j \rangle = \langle e_i, e_j \rangle \Leftrightarrow \langle v_i - e_i, A(v_j - e_j) \rangle = 0$$

$\leadsto \langle v_i, v_j \rangle = \langle e_i, e_j \rangle$ si i fixe

$$\langle v_i, A v_j \rangle = \langle e_i, A e_j \rangle$$

$$\in \perp \{v_i - e_i\} \quad \forall A$$

Méthode 3: [$(X^*AX)_{ij} = \langle e_i, (X^*AX)e_j \rangle = \langle X e_i, A X e_j \rangle$]

On veut: $\langle X e_i, A X e_j \rangle = \langle e_i, A e_j \rangle \quad \forall i, j \leq n$

Exo 5:

Vérifier que $(u_k)_n = \sin(\pi k \frac{n}{N})$, $k=1, \dots, N-1$ est un vecteur propre de (l'opposé de) la matrice du Laplacien en dimension 1 ; $\lambda_k = 2N^2(1 - \cos(\pi \frac{k}{N}))$

Rappels: $\Delta: U \mapsto \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_i^2}$

$$U: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}, \quad U: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Delta U = U$$

$[-L, L]$ discrétisée en N points (x_n)

$$U''(x_n) = \frac{2U(x_n) - U(x_{n-1}) - U(x_{n+1}))}{(\frac{1}{N^2})}$$

$$x_n = -L + \frac{n}{N} 2L, \quad U(x_0) = 0 \quad U(x_{N-1}) = 0$$

$$\Delta_N = N^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

* On veut montrer que

$$\forall K, \Delta_N \times \underbrace{\begin{pmatrix} \sin(\pi K \frac{1}{N}) \\ \vdots \\ \sin(\pi K) \end{pmatrix}}_{V_K} = N^2 \left(\cos\left(\frac{K\pi}{N}\right) - 1 \right) \begin{pmatrix} \sin(\pi K \frac{1}{N}) \\ \vdots \\ \sin(\pi K) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(\pi K \frac{1}{N}) \\ \vdots \\ \sin(\pi K) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sin(\pi K \frac{1}{N}) - \sin(\pi K \frac{2}{N}) \\ -\sin(\pi K \frac{1}{N}) + 2\sin(\pi K \frac{2}{N}) - \sin(\pi K \frac{3}{N}) \\ \vdots \\ -\sin(\pi K \frac{N-1}{N}) + 2\sin(\pi K) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (-\Delta_N \times V_K)_n &= N^2 \left[2\sin\left(\frac{\pi K n}{N}\right) - \sin\left(\frac{\pi K(n-1)}{N}\right) - \sin\left(\frac{\pi K(n+1)}{N}\right) \right] \\ &= N^2 \left[2\sin\left(\frac{\pi K n}{N}\right) - 2\sin\left(\frac{\pi K n}{N}\right) \times \cos\left(\frac{\pi K}{N}\right) \right] \\ &= 2N^2 \times \sin\left(\frac{\pi K n}{N}\right) \times \left(1 - 2\cos\left(\frac{\pi K}{N}\right)\right) \end{aligned}$$

$\sin(a+b) + \sin(a-b)$
 $= \sin a \cos b + \sin b \cos a$
 $= 2\sin a \cos b$

* si $N \gg K$

$$\sin\left(\frac{\pi K n}{N}\right) \sim \frac{\pi K n}{N}$$

$$2N^2 \left(1 - \cos\left(\frac{\pi K}{N}\right)\right) \sim \frac{\pi^2 K^2}{N^2} \times 2N^2 = 2\pi^2 K^2$$

↑ [quantification des up du Laplacien]

Exercices 4, 6, 9, 10

Exo 4.

a) $A \in \mathbb{C}^{N \times M}$, mq A^*A symétrique def > 0 ssi A est de rang maximal M (colonnes de A indépendantes)
 $A^*A \in \mathbb{C}^{N \times N}$

symétrie: $(A^*A)^* = A^*(A^*)^* = A^*A$

défini positif: il faut vérifier que $\langle (A^*A)x, x \rangle > 0 \quad \forall x \in \mathbb{C}^N \setminus \{0\}$

* par définition, $\forall x \in \mathbb{C}^N, y \in \mathbb{C}^N \quad \langle Ay, x \rangle = \langle y, A^*x \rangle \quad (A^* = {}^t\bar{A})$

$$\langle A^*Ax, x \rangle = \langle Ax, Ax \rangle = \|Ax\|^2 > 0$$

(= 0 ssi $Ax = 0$ ssi $x = 0$ si A est injective (i.e. les colonnes sont indépendantes))

b) mq si $A^*A = LL^*$ (L : triangulaire supérieure) alors $A(L^*)^{-1}$ est une matrice orthogonale
 L'adjoint est l'inverse

$$\begin{aligned} \text{On calcule } (A(L^*)^{-1})^* A(L^*)^{-1} &= ((L^*)^{-1})^* \overbrace{A^*A}^{= LL^* \text{ par hyp}} (L^*)^{-1} \\ &= \underbrace{L^{-1}}_{Id} \underbrace{LL^*}_{Id} (L^*)^{-1} = Id \end{aligned}$$

√ produit des adjoints

c) Appliquer cette méthode $A = (v_1 \ v_2)$ $v_1, v_2 \in \mathbb{C}^N$ de norme 1 + comparer avec Gram Schmidt

$$\begin{aligned} A &= [A(L^*)^{-1}] L^* \\ &= Q \quad R \text{ triangulaire supérieure} \\ &\quad \uparrow \text{orthogonale} \end{aligned}$$

* chercher $L \quad A^*A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$

$$A^*A = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle \end{pmatrix}$$

$$\leadsto \langle x, y \rangle = \sum_i x_i \bar{y}_i \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$(A^*A)_{ij} = \sum_{k=1}^M (A^*)_{ik} A_{kj} = \sum_{k=1}^M \bar{A}_{ki} A_{kj} = \langle v_i, v_j \rangle$$

$$A = (v_1 \mid \text{---} \mid v_m)$$

$$L = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}, \quad LL^* = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ 0 & \bar{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 & a\bar{b} \\ \bar{a}b & |b|^2 + |c|^2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow a = \sqrt{\langle v_1, v_1 \rangle} = \|v_1\| = 1$$

$$b = \langle v_2, v_1 \rangle$$

$$c = \sqrt{1 - |\langle v_1, v_2 \rangle|^2}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \sqrt{1 - |\langle v_1, v_2 \rangle|^2} \end{pmatrix}$$

Exo 6:

matrice de rotation de Givens:

$$G(i, j, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & c & -s & \\ & & s & c & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} c = \cos \theta \\ s = \sin \theta \\ \text{lignes et colonnes particuli  es: } i \text{ et } j \end{array}$$

a) interprétation géométrique

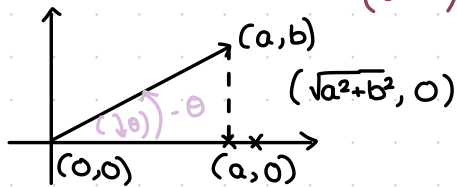
on regarde l'action sur un vecteur

$$G(i, j, \theta) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x'_i \\ \vdots \\ x'_j \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \quad \text{où} \begin{pmatrix} x'_i \\ x'_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ x_j \end{pmatrix}$$

* G est la rotation d'angle θ dans le plan Vect(e_i, e_j)
(e_i, e_j) base directe)



b) comment choisir θ tq $\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{a^2 + b^2} \\ 0 \end{pmatrix}$



$$\cos(-\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos(\theta)$$

$$\sin(-\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = -\sin(\theta)$$

c) $M_q(A)_{ij} = 0$ en multipliant    gauche par une matrice unitaire, en ne modifiant que les lignes i et j
+ méthode pour calculer la factorisation QR d'une matrice

(que les co  fs i, j)

$$G^T G = \text{Id} \quad (\text{si } G \text{ réelle})$$

$$G^* G = \text{Id}$$

A matrice: But $A = QR$ triangulaire sup.

orthogonale

$$Q^{-1}A = R$$

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & & \\ 0 & r_{22} & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & 0 & \ddots \end{pmatrix}$$

$$G A e_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \exists \theta \text{ tq } G(1, 2, \theta) A(e_1) = \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ * \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quand on effectue le produit $G(i, j, \theta)A$, on ne modifie que $a_{ii}, a_{ij}, a_{ji}, a_{jj}$

$$G(1, n, \theta_n) G(1, n-1, \theta_{n-1}) \dots G(1, 2, \theta_2) A$$

$$= \begin{pmatrix} * & * & \dots & * \\ 0 & * & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & * & & * \end{pmatrix} \quad G(2, 3, \theta_3) \dots G(2, n, \theta_n)$$

n^2 matrices de Givens

G_1 et G_2 orthogonales

$$(G_1 G_2)^{-1} = G_2^{-1} G_1^{-1} = G_2^T G_1^T = (G_1 G_2)^T$$

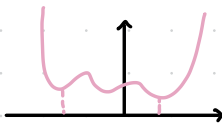
Exo 10

$$f(x) = \|Ax - b\|^2 + \lambda \|x\|^2, \lambda > 0$$

mq la solution de ce problème est unique, même si A n'est pas de rang M .

* f admet un min

f est continue et "coercive" ($f(x) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty$)



donc admet un minimum global ($\Delta!$ pas forcément unique)
(exo)

- Soit x un minimum def.

$$\text{Alors } \nabla f(x) = 0$$

$$(f(x+h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle + o(|h|))$$

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \langle A(x+h) - b, A(x+h) - b \rangle + \lambda \langle x+h, x+h \rangle \\ &= f(x) + \langle Ah, Ax - b \rangle + \langle Ax - b, Ah \rangle + \lambda (\langle x, h \rangle + \langle h, x \rangle) + o(|h|^2) \\ &= f(x) + \underbrace{2 \langle A^*(Ax - b) + \lambda x, h \rangle}_{\nabla f(x)} \end{aligned}$$

- On veut mq $A^*(Ax - b) + \lambda x = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

$$\nabla f(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{(A^*A + \lambda I_n)}_{\text{injective?}} x = A^*b$$

$\uparrow$ sys linéaire unique sol

$$\text{On résout } (A^*A + \lambda I_n)x = 0$$

$$\text{Comme } \text{Spec}(A^*A) \subset \mathbb{R}_+$$

$$\text{On a } \text{Spec}(A^*A) \subset [\lambda, +\infty[\quad (0 \text{ n'est pas up donc } A \text{ injective})$$

$$\text{ou } \Rightarrow \langle (A^*A + \lambda \text{id})x, x \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \|Ax\|^2 + \lambda \|x\|^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

Feuille 3 exercices 2, 3, 4, 5, 8

Exo 2

Hq les matrices sym $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ vp double est un sev. Que peut-on attendre des vp d'une matrice réelle sym 2×2 $A(t)$?

$$S_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} ; a, b, d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E = \{ A \in S_2(\mathbb{R}) ; A \text{ a une vp double} \}$$

thm spectral: si A symétrique réelle, alors $\exists P$ orthogonale tq $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, alors $A = \lambda I_2$

$$\text{donc } E \subset \{ \lambda I_2 ; \lambda \in \mathbb{R} \}$$

si $A = \lambda I_2$, $\chi_A(x) = (x - \lambda)^2$ sa vp est λ (double)

$$\text{donc } \{ \lambda I_2 ; \lambda \in \mathbb{R} \} \subset E$$

$E = \text{vect}(I_2)$ est un sev de $S_2(\mathbb{R})$

une base de E est (I_2) . Donc $\dim(E) = 1$

* si $A = A(t) \in S_2(\mathbb{R})$

On peut choisir deux fonctions $\lambda_1(t), \lambda_2(t) \in \mathbb{R}$ continues en t et $\{ \lambda_1(t), \lambda_2(t) \} = \sigma(A(t)) \forall t$

si $\lambda_1(t) = \lambda_2(t)$, $A(t) = \lambda(t)I_2$

Exo 3

Hq si M hermitienne def pos, alors $\langle x, y \rangle_M = x^* M y$ produit scalaire

Calculer B (adjoint de A pour le produit scalaire M si $\langle x, Ay \rangle_M = \langle Bx, y \rangle_M$)

M hermitienne (définie positive) $\langle x, y \rangle_M = x^* M y$

$$\bullet \langle x, x \rangle_M = x^* M x \geq 0 (\geq 0 \text{ si } x \neq 0) \text{ car M hermitienne}$$

$$\bullet \langle \lambda x, y \rangle_M = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle_M (x^* = \bar{\lambda} \bar{x})$$

$$\bullet \langle x, \lambda y \rangle_M = \lambda \langle x, y \rangle_M \quad \downarrow \text{matrice } 1 \times 1$$

$$\bullet \langle x, y \rangle_M = \bar{\lambda} x^* M y = \bar{\lambda} x^* M \bar{y} = \bar{\lambda} (x^* M \bar{y}) = \bar{\lambda} \bar{y}^* \bar{M} x = \bar{\lambda} \bar{y}^* \bar{M} x = \langle y, x \rangle_M$$

$\bar{M} = M \text{ (M hermitienne)}$

$$\langle A^* x, y \rangle_M = \langle x, Ay \rangle_M$$

$$= \langle x, M A y \rangle_{\text{eucl}}$$

$$= \langle {}^t \bar{M} x, A y \rangle_{\text{eucl}}$$

$$= \langle {}^t \bar{A} {}^t \bar{M} x, y \rangle_{\text{eucl}}$$

$$= \langle {}^t \bar{A} {}^t \bar{M} x, M^{-1} M y \rangle_{\text{eucl}}$$

$$= \langle M^{-1} {}^t \bar{A} M, M y \rangle_{\text{eucl}}$$

$$= \langle M^{-1} {}^t \bar{A} M, y \rangle_M$$

$$A^* = M^{-1} {}^t \bar{A} M$$

Exo 4

Mq si A hermitienne def pos et B hermitienne, alors AB diagonalisable à vp réels

(Ind: $\langle x, y \rangle_{A^{-1}} = x^* A^{-1} y$)

A HDP, B hermitienne

(M = A⁻¹ dans l'exo 3) $\Rightarrow \langle \cdot, \cdot \rangle_{A^{-1}}$

On calcule l'adjoint de AB pour ce produit scalaire

$$\begin{aligned} (AB)^* &= M^t (\overline{AB}) M \\ &= \underbrace{A^t \bar{B}^t}_{B} \underbrace{\bar{A} A^{-1}}_{I_n} = AB \end{aligned}$$

Exo 5

Mq toute matrice diagonalisable est normale pour un certain produit scalaire (commute avec ce produit scalaire)

A diagonalisable

$$A = P^{-1} D P$$

$$\langle x, y \rangle = \langle P x, P y \rangle_{\text{eucl}}$$

Il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs propres tq $A e_i = \lambda_i e_i, \lambda_i \in \mathbb{C}$

Tout $x \in \mathbb{C}^n$ se décompose

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i \quad \begin{matrix} \downarrow \\ \text{(coordonnées} \\ \text{dans la base} \\ \text{de vecteurs propres)} \end{matrix}$$

$$A x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i e_i$$

$$\langle A x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{\lambda}_i \bar{x}_i y_i \quad (*)$$

La matrice adjointe doit satisfaire $\forall x, y \quad \langle A x, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle$

$$\Rightarrow A^* \left(\sum y_i e_i \right) = \sum \bar{\lambda}_i y_i e_i$$

On calcule:

$$A^* A \left(\sum x_i e_i \right) = A^* \left(\sum \lambda_i x_i e_i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^n \bar{\lambda}_i (\lambda_i x_i) e_i = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 x_i e_i$$

$$A A^* \left(\sum x_i e_i \right) = A \left(\sum \bar{\lambda}_i x_i e_i \right) = \sum |\lambda_i|^2 x_i e_i$$

(ou bien: $A = P^{-1} D P$

$$\langle P x, P y \rangle ?$$

$$\langle P A x, P y \rangle_{\text{eucl}} = \langle D P x, P y \rangle_{\text{eucl}}$$

$$= \langle P x, \bar{D} P y \rangle_{\text{eucl}}$$

$$= \langle P x, P (P^{-1} \bar{D} P) y \rangle_{\text{eucl}}$$

$$A^* = P^{-1} \bar{D} P$$

$$A A^* = P^{-1} |D|^2 P = A^* A$$

Exo 8.

Soit $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$ HDP

$P \in \mathbb{C}^{N \times n}$ rang n , $n \leq N$

rq P^*AP inversible + contre exemples: A n'est pas HDP

$A \in \mathbb{C}^{N \times N}$ HDP, $P \in \mathbb{C}^{N \times n}$ de rang n
 $\hookrightarrow$ (non trivial si $n < N$)

$B = P^*AP$ inversible? (taille $n \times n$)

$$P = (p_1, \dots, p_n)$$

$$= (\langle p_i, A p_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}$$

$$\text{rq: } 1) B^* = P^* A^* P = B$$

$$\langle Bx, x \rangle = \langle P^* A P x, x \rangle \quad (= 0 \text{ si } Px = 0 \text{ si } x = 0 \text{ car } P \text{ est de rang maximal})$$

$$= \langle A P x, P x \rangle \quad (> 0 \text{ et } < 0 \text{ si } P x \neq 0)$$

$\hookrightarrow$ automatiquement inversible

Fin exo 8 (02/02/26)

$A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ HDP $P \in \mathbb{C}^{2 \times 1}$ de rang 1

$$P^* A P \neq 0$$

$A = 0$ ne marche pas

$$P^* A P = \langle P, A P \rangle$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Symétrique } A^2 = I_2 \quad \chi_A = X^2 - 1$$

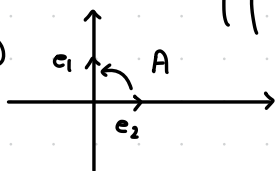
$$\text{Spectre } A = \{-1, 1\}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(e_1, e_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \rightsquigarrow A$$

$$(e_2, e_1) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \rightsquigarrow A$$

$$\langle P, A P \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$



Feuille 3 exos: 6, 7, 9

Exo 6:

Hq $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ commute avec $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ + en déduire sans calcul une base de vp de A.

[cours]

↳ argument ne marche pas
si les vecteurs p pas de dim 1

A commute avec $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc laisse invariant ses sous-espaces propres $\mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Exo 7:

B sous-matrice de A hermitienne. Hq si $\lambda_1(A) \leq \lambda_2(A) \leq \dots \leq \lambda_n(A)$
 $\lambda_1(B) \leq \lambda_2(B) \leq \dots \leq \lambda_e(B)$

(désignent les valeurs propres de A, B ordonnées dans l'ordre croissant, montrer

$\forall i \in \{1, \dots, e\}, \lambda_i(A) \leq \lambda_i(B)$

et $\lambda_{n+1-i}(A) \geq \lambda_{e+1-i}(B)$

i=1: $\lambda_1(A) \leq \lambda_1(B)$

$$\bullet \lambda_1(A) = \min_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in \mathbb{C}^n}} \langle x, Ax \rangle$$

$$\bullet A = \begin{pmatrix} \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i \\ \leftarrow j \end{matrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{pmatrix}$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow$
 $i \quad \quad j$

$A|_{\text{Vect}(e_i, e_j)}$ + projection sur un espace de dim 2

$$\hookrightarrow B = \underbrace{P^* A P}_{\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^e} \underbrace{\quad}_{\mathbb{R}^e \rightarrow \mathbb{R}^n};$$

"projection" "inclusion"

$$\text{si } B = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq e \\ 1 \leq j \leq e}}$$

dans ce cas, on peut prendre $P = \begin{pmatrix} I_e \\ 0 \end{pmatrix}$

$$P^* = \begin{pmatrix} I_e & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{si } B = (a_{ij})_{\substack{i \in I \\ j \in I}} \quad \begin{matrix} I \subset \{1, \dots, n\} \\ |I| = e \end{matrix}$$

$$\rightarrow \mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R}^{|I|}}_{\substack{\simeq \mathbb{R}^e \\ \uparrow \text{isomorphe à}}} \oplus \underbrace{\mathbb{R}^{n-|I|}}_{\substack{\simeq \mathbb{R}^{n-1} \\ \uparrow \text{isomorphe à}}}, \text{ donc on peut définir } P: \mathbb{R}^e \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\begin{matrix} \simeq \\ \mathbb{R}^{|I|} \end{matrix} \xrightarrow{\text{inclusion}} \mathbb{R}^n$$

+ voir aud 6

10007

$$\lambda_1(B) = \min_{\substack{y \in \mathbb{C}^e \\ \|y\|=1}} \langle y, P^* A P y \rangle = \min_{\substack{y \in \mathbb{C}^e \\ \|y\|=1}} \langle P y, A P y \rangle ; \text{ or } P \text{ vérifie } P^* P = I_e \text{ (mais } P P^* \neq I_n, P P^* = \Pi_{\text{Im}(P)})$$

* projection orthogonale sur l'image de P

$$\|P y\| = \|y\| \text{ (car } P^* P = I_e) \quad \langle P y, P y \rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle P^* P y, y \rangle_{\mathbb{C}^e} = \langle y, y \rangle_{\mathbb{C}^e}$$

$$\{P y : y \in \mathbb{C}^e, \|y\|=1\} \subset \{x : x \in \mathbb{C}^n, \|x\|=1\}$$

$$\text{donc } \min_{\substack{y \in \mathbb{C}^e \\ \|y\|=1}} \langle P y, A P y \rangle \geq \lambda_1(A)$$

* pour $\lambda > 1$

énoncé équivalent: si B admet K valeurs propres $\leq C$, alors A admet K valeurs propres $\leq C$ (2)

Si il existe un sev $I \subset \mathbb{C}^e$ de dimension K tel que $\forall y \in I, \langle B y, y \rangle \leq C \|y\|^2$ alors on peut faire pareil avec A. (1)

(1) pour $K=1$:

$$\text{si } \exists y \in \mathbb{C}^e \setminus \{0\} \text{ tq}$$

$$\Rightarrow \exists x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \quad \langle A x, x \rangle \leq C \|x\|^2$$

$$\text{si on prend } x := P y \text{ est non nul et } \langle A P y, P y \rangle = \langle B y, y \rangle, \text{ et } \|P y\| = \|y\|$$

cas général: $F' = P(F)$ sev de dimension K

$$\forall x \in F', \quad \langle A x, x \rangle = \langle A P y, P y \rangle$$

$$\uparrow$$

$$\exists y \in F \quad = \langle B y, y \rangle$$

$$x = P y \quad \leq C \|y\|^2$$

$$\leq C \|x\|^2$$

(2) Si B admet K vp $\leq C$, on peut trouver une base orthonormée des vecteurs propres de B : $f_1, \dots, f_K$ tq $\langle B f_i, f_i \rangle \leq C \|f_i\|^2 \quad \forall i = 1, \dots, K$

$$F := \text{Vect}(f_1, \dots, f_K)$$

$$\forall x \in F, \quad \langle B x, x \rangle \leq C \|x\|^2 \text{ (vérifier)}$$

$$F' = P(F) \Rightarrow \forall x \in F', \langle A x, x \rangle \leq C \|x\|^2 \quad (1)$$

contreposée:

si A n'admet pas K vp $\leq C$

$(e_1, \dots, e_n)$ base de $\mathbb{C}^n$

$$x = \sum x_i e_i \rightarrow \langle A x, x \rangle = \sum_{i \leq K} \lambda_i(A) x_i^2 + \sum_{i > K} \lambda_i(A) x_i^2$$

$$\text{je pose } V = \text{Vect}(e_K, \dots, e_n) \quad \dim(V) = n - K + 1$$

$$\forall x \in V, \quad \langle A x, x \rangle \geq \lambda_K \|x\|^2 > C \|x\|^2$$

$$\text{or } \dim(V) + \dim(F') > \dim \mathbb{C}^n \Rightarrow V \cap F' \neq \{0\}$$

Conclusion: $(\lambda_i(A) \leq \lambda_i(B))$

on prend $C = \lambda_i(B)$

$$B \text{ admet } i \text{ vp } \leq C \xRightarrow{(2)} A \text{ admet } i \text{ vp } \leq C$$

$$\Rightarrow \lambda_i(A) \leq C (= \lambda_i(B))$$

* car on a ordonné les vp de façon croissante

Exo 12:

Mq $\sum_{j=0}^{N-1} |x_j|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |(Fx)_k|^2$

* $F(X)_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} e^{-\frac{2i\pi K j}{n}} x_j$ (on retire le $1/n$, si on normalise pas, dans l'énoncé, on rajoute $1/n$ dans l'énoncé)

$\|F(X)\|_2^2 = \sum_{k=0}^{n-1} |F(X)_k|^2$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{j'=0}^{n-1} e^{-\frac{2i\pi K j}{n}} x_j e^{-\frac{2i\pi K j'}{n}} \overline{x_{j'}} \quad \Delta! |z|^2 = z \bar{z}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{j'=0}^{n-1} e^{-\frac{2i\pi K j}{n}} x_j e^{+\frac{2i\pi K j'}{n}} \overline{x_{j'}}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j,j'=0}^{n-1} x_j \overline{x_{j'}} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2i\pi (j'-j)k}{n}} \right)}_{n\delta_{j=j'}}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} x_j \overline{x_j} \cdot n = \|X\|^2$$

$$(F(X))_k = \int e^{-2i\pi K t} x(t) dt$$

Exo 10:

donner la transformée de Fourier discrète de $x_j = \cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right)$

$K \in \{0, \dots, n-1\}$

$$F(X)_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} e^{-\frac{2i\pi K j}{n}} \left(\frac{e^{\frac{2i\pi j}{n}} + e^{-\frac{2i\pi j}{n}}}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{n}} \sum_{\pm} \sum_{j=0}^{n-1} e^{-\frac{2i\pi (K \pm 1)j}{n}}$$

$= n$ si $K \pm 1 = 0 \pmod{n}$

0 sinon

$$= \frac{n}{2\sqrt{n}} \left(\delta_{K+1=n} + \delta_{K-1=0} \right) = \frac{\sqrt{n}}{2} \left(\delta_{K=1} + \delta_{K=n-1} \right) \quad (\cos t = e^{it} + e^{-it})$$

Feuille 3: 9, 11 Feuille 4: 6, 14, 15, 16

Exo 9.

Mq si A commute avec T (est invariante par translation) alors A est une matrice cumulante (représentant une convolution)

A commute avec $T \Leftrightarrow A$ est une matrice cumulante

$$(A = \sum_{k=0}^{N-1} a_k T^k \quad (A \in \mathbb{C}[T]) \quad T^N = I_N)$$

$$\uparrow TA = \sum a_k T T^k = \sum a_k T^k T = AT \quad \text{inclusion}$$

→ Q: quelle est la dimension (de scv) de $\{A \in \mathbb{C}^{N \times N} : AT = TA\}$?

→ Q: Quelle est la dimension de $\mathbb{C}[T] = \{ \sum_{k=0}^{N-1} a_k T^k : (a_0, \dots, a_{N-1}) \in \mathbb{C}^N \}$?

$\dim \mathbb{C}[T] = N$ (on a une base donnée par $(T^0, \dots, T^{N-1})$)

m1:

• $\chi_T = X^N - 1$ (racines simples, donc c'est aussi le polynôme minimal (de degré N))

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$$

pour mq
 $\dim \mathbb{C}[T] = N$

m2:

$$\bullet \sum a_k T^k = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & & \\ & a_1 & a_2 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & a_{N-1} \end{pmatrix} \quad \langle e_i, \sum a_k T^k e_j \rangle = a_{j-i}$$

m3:

• Si A commute avec T , alors A laisse invariants les sous espaces propres T (sont de dimension 1)

donc $A = P^{-1} D P$ où P envoie les vecteurs propres sur les vecteurs de la base canonique

↳ on a N 'racons' de mettre les vp sur la diag

Q1: $\dim N$

+ inclusion $\leadsto$ les 2 sous ensembles sont égaux.

Rq: $Av = a * v$

$$AT = TA \Rightarrow AT^N = T^N A$$

$$\text{donc } A e_n = AT^N e_0 = T^N (A e_0) = (A e_0) * e_n$$

ici, $(e_0, \dots, e_{N-1})$ désigne la base canonique de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}$

$$A e_n = a * \underbrace{e_0}_{e_0}$$

$$A e_0 = a * e_0 = a$$

Exo 11:

Donner la matrice représentant la transformation

$$(Ax)_j = \frac{x_{j-1} + 2x_j + x_{j+1}}{4} \quad (i) \quad / \quad (Ax)_j = \frac{x_{j-1} - 2x_j + x_{j+1}}{(2\pi/N)^2} \quad \leftarrow \text{(méthode des différences finies)}$$

Appliquer le thm de convolution. Donner l'asymptotique pour $|K| \ll N$ + interpréter

$$Ax = a * x \quad \text{avec} \quad a = \frac{1}{4} e_{-1} + \frac{1}{2} e_0 + \frac{1}{4} e_1 \quad (\text{thm convolution: } \widehat{F}(Ax) = \widehat{F}(a * x) = \widehat{F}(a) \widehat{F}(x))$$

$$\hookrightarrow F(a)_K = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i j K}{N}} a_j$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\frac{1}{4} e^{-\frac{2\pi i K}{N}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{\frac{2\pi i K}{N}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{N}} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi K}{N}\right) \right)$$

$$F(x)_K = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i j K}{N}} x_j$$

$$\begin{aligned} \bullet F(f * g) &= F(f) * F(g) \\ \bullet \|F(x)\|_2^2 &= N \|F(x)\|_1^2 \end{aligned}$$

$$F(a * x)_K = \frac{1}{2\sqrt{N}} \underbrace{\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi K}{N}\right) \right)}_{\approx 1 \text{ (} K \ll N \text{)}} F(x)_K \approx \frac{1}{\sqrt{N}} F(x)_K$$

si x oscille peu alors $F(x)$ est concentrée aux basses fréquences ($K \ll N$)

$$\hookrightarrow (Ax)_j = \frac{x_{j-1} - 2x_j + x_{j+1}}{(2\pi/N^2)} \quad \leftarrow \begin{aligned} y_{j+1} &= y(x+h) \\ y_{j-1} &= y(x-h) \\ h &= \frac{2\pi}{N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neq y''(x) &= f(x) \text{ sur } [0, 2\pi] \\ x_j &= \frac{2\pi j}{N} \quad (y_j) = (f(x_j)) \text{ inconnue} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(x+h) &= y(x) + h y'(x) + \frac{h^2}{2} y''(x) + \dots \\ y(x-h) &= y(x) - h y'(x) + \frac{h^2}{2} y''(x) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(x+h) + y(x-h) &= 2y(x) + h^2 y''(x) + \dots \\ \leadsto y''(x) &= \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow a = \frac{1}{(2\pi/N)^2} (e_1 - 2e_0 + e_{-1})$$

$$F(a)_K = \frac{1}{(2\pi/N)^2} \left(e^{-\frac{2\pi i K}{N}} - 2 + e^{\frac{2\pi i K}{N}} \right) = \frac{2}{(2\pi/N)^2} \left(\cos\left(\frac{2\pi K}{N}\right) - 1 \right) = \frac{2}{(2\pi/N)^2} \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{2\pi K}{N} \right)^2 \right) = -K^2$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{iKx} = -K^2 e^{iKx}$$

$$F(f'')(K) = -K^2 F(f)(K)$$

Exo 6:

Rappels : conditionnement de A

$$\text{cond}(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

$$\text{ex: } \|A\|_\infty = \max_i |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2^2 = \sum a_{ij}^2$$

Calculer les vecteurs et valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$

Calculer le conditionnement de la matrice des vecteurs propres

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Spec}(A) = \{0, \varepsilon\}$$

$$A e_1 = 0 \text{ (} e_1 \text{ vecteur propre pour } 0 \text{)}$$

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix} \text{ (autre vecteur propre } \varepsilon \text{)}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon^{-1} \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\ast \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\|P\|_{\infty} = 1, \|P^{-1}\|_{\infty} = \varepsilon^{-1}$$

$$\text{cond}_{\|\cdot\|_{\infty}}(P) = \varepsilon^{-1} \text{ (matrice "pas agréable")}$$

$$[Ax = b \leadsto \text{solution } x_0]$$

$$Ax = b + \delta b \leadsto \text{solution } x_{\delta}$$

$$Ax_{\delta} = b + \delta b \leadsto A(x_{\delta} - x_0) = \delta b$$

$$Ax_0 = b \leadsto \|x_{\delta} - x_0\| \leq \|A^{-1}\| \|\delta b\|]$$

$$(A + \delta A) \cdot \delta = b$$

$$Ax_0 = b$$

$$A(I + A^{-1}\delta A)x_j = b \Rightarrow A(x_j - x_0)$$

$$Ax_0 = b$$